CONJUNTOS EVITABLES, CAPACIDAD ANALÍTICA Y MEDIDAS DE HAUSDORFF

Abel Rosales Tristancho
Dpto. de Análisis Matemático

CONJUNTOS EVITABLES, CAPACIDAD ANALÍTICA Y MEDIDAS DE HAUSDORFF

Abel Rosales Tristancho
Dpto. de Análisis Matemático
Sevilla, Junio de 2016

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por
Prof. Luis Rodríguez Piazza

Índice general

English Abstract

The main problem we consider in this work is the characterization of removable sets. A compact set E in the complex plane is removable if there exists an open set Ω containing E such that every bounded and analytic function in $\Omega \setminus E$ has an analytic extension to the whole set Ω. For this, we will study some concepts such as analytic capacity, Hausdorff measure and Hausdorff dimension of sets.

The analytic capacity of E, $\gamma(E)$, constitutes a form to measure "how removable is a compact set E" and its definition deals with the behaviour of holomorphic functions on $\mathbb{C} \setminus E$ and not with the geometric properties of E. Hausdorff measure and dimension are geometric concepts related to the size of sets. We will see that a compact set E is removable if and only if $\gamma(E) = 0$. With this result we can study the relationship between removability and Hausdorff dimensions. In particular, Painleve's Theorem says that any set with length equal to zero is removable. The most important connection with Hausdorff dimension is that the length of any set is identical to the Hausdorff measure in one dimension. Moreover, we will provide an example due to J. Garnett to show that the inverse implication of this result is not true.

In the opposite direction, we will prove that if a set E has Hausdorff dimension strictly largest than one then it is not removable. For this, we will need to prove the Frostman's Lemma and introduce one of the most important tool in this area: the Cauchy transform.

Introducción

El nacimiento del tema que vamos a estudiar puede ser relacionado con el famoso teorema de Riemann sobre singularidades evitables, que afirmaba:

"Sean una región del plano complejo Ω y una función holomorfa en dicha región salvo quizás en un punto al que denotamos por z_0. Si la función es acotada en un entorno del punto, entonces z_0 es una singularidad evitable."

El hecho de que un punto sea una singularidad evitable recordamos que quiere decir que la función en cuestión admite una prolongación analítica a todo Ω, incluyendo el punto en el que no era holomorfa. A partir este resultado se puede comprobar que un conjunto finito o un compacto numerable son evitables. Pero la pregunta que sigue inmediatamente a dichos resultados es qué puede ocurrir con conjuntos que no sean numerables. A partir de ahí nace el estudio de los conjuntos evitables.

Un compacto K del plano complejo se dice evitable si para cualquier abierto Ω conteniendo al compacto, toda función analítica y acotada en $\Omega \setminus K$ admite una extensión analítica a todo Ω. A raíz de este concepto nacen diversas cuestiones en torno a él como, por ejemplo, qué formas existen para determinar los conjuntos de $\mathbb{C}$ que son evitables; qué propiedades tienen estos compactos, tanto analíticas como geométricas; o bien, si existe alguna forma de medir "cuánto de evitable" es un compacto. En 1888, Paul Painlevé fue uno de los primeros en estudiar este tema, de forma que se planteó si era posible caracterizar de forma métrica o geométrica conjuntos compactos evitables en el plano complejo. Fue de esta forma como P. Painlevé obtuvo el primer resultado geométrico de interés relacionado con los conjuntos evitables. La consecuencia fundamental del famoso Teorema de Painlevé establece que todo conjunto de longitud nula es evitable. Evidentemente, se trata de una condición suficiente, quedando abierta la cuestión de la veracidad o falsedad del recíproco durante muchos años.

No fue hasta 1959 cuando A. G. Vitushkin ofreció el primer contraejemplo ([Vit]) con el fin de refutar la implicación contraria al Teorema de Painlevé. En nuestro trabajo se expondrá un contraejemplo introducido por J. Garnett ([Gar]) de un conjunto evitable pero con longitud estrictamente positiva.

Fue en 1942 cuando Lars Ahlfors replanteó el problema que había dejado Painlevé preguntándose cuándo era posible encontrar una función analítica, acotada y que no fuera constante en el complementario de un compacto dado. Durante el estudio del citado problema, L. Ahlfors introdujo conceptos nuevos como el de la capacidad analítica de un compacto. Para un compacto cualquiera del plano complejo la capacidad analítica se define como

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| : f \colon \mathbb{C} \setminus E \to \mathbb{C} \text{ holomorfa y } \|f\|_\infty \leq 1\},$$

definiéndose la derivada en el infinito como

$$f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)),$$

aunque también se probaría que, para la definición de $\gamma(E)$, bastaba considerar funciones f con $f(\infty) = 0$. Para la capacidad analítica, es posible deducir propiedades como la monotonía entre conjuntos, la invarianza frente a traslaciones o la invarianza, salvo constante, frente a homotecias.

Tal y como se ha indicado, estos conceptos nacieron a partir del deseo de resolver el problema planteado por Painlevé, por lo que es natural explicar la relación que existe entre la capacidad analítica y los conjuntos evitables. Dicha relación es uno de los resultados fundamentales que vamos a estudiar a lo largo del trabajo. En él se establece una equivalencia entre los siguientes enunciados:

- E es evitable para funciones analíticas y acotadas.
- El conjunto de funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{C} \setminus E$ es el de las constantes.
- La capacidad analítica de E es cero.

Por tanto, podemos a responder a la pregunta de si existe alguna forma de medir "cuánto de evitable" es un conjunto. Dicha respuesta es la capacidad analítica. Es cierto que no ofrecía una medida de tipo geométrico de la evitabilidad de un conjunto pero, con los resultados que se habían probado hasta el momento, ya eran posibles algunas caracterizaciones de los conjuntos evitables, como se ha mencionado más arriba.

Por todo ello, el problema se trasladó al estudio de la capacidad analítica, pues ya se había probado que a partir de ella era posible caracterizar conjuntos evitables. Las principales herramientas con la que se empieza a trabajar a partir de ahora son la medida y dimensión de Hausdorff. En un espacio métrico, consideramos un conjunto E y todos los recubrimientos por conjuntos de él cuyo diámetro no exceda una cierta cantidad $\delta > 0$. El ínfimo de la suma de diámetros elevados a α se define como $\mathcal{H}^\alpha_\delta(E)$. Cuando hacemos tender δ a 0 obtenemos la definición de medida α-dimensional de Hausdorff, $\mathcal{H}^\alpha(E)$. Por otra parte, existe un número $\beta \in [0, +\infty]$ de forma que para todo $\alpha < \beta$ se satisface que $\mathcal{H}^\alpha(E) = +\infty$ y, para todo $\alpha > \beta$ se tiene que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Al valor β que cumpla dichas condiciones lo llamaremos dimensión de Hausdorff del conjunto E. Una de las propiedades más interesantes de la dimensión de Hausdorff es que puede tomar valores que no sean enteros, hecho que está estrechamente ligado con los conjuntos fractales.

A lo largo de la exposición del trabajo veremos la relación de esta medida con la medida de Lebesgue, así como su aplicación en casos concretos como son las curvas rectificables o los conjuntos de Cantor, que se definirán en el momento preciso. Pero lo que más debe ocupar nuestra atención es la relación de estas medidas con el tema de la capacidad analítica. Tal y como se dijo, el Teorema de Painlevé establecía que todo conjunto de longitud nula es evitable. Probaremos que la longitud de un conjunto coincide con su medida de Hausdorff en dimensión 1, por lo que el enunciado anterior equivale a decir que todo conjunto con medida 1-dimensional de Hausdorff cero es evitable.

Por último, trabajaremos con la transformada de Cauchy, que nos permitirá demostrar que todo conjunto con dimensión de Hausdorff estrictamente mayor que uno no es evitable. Para ello, tendremos que detenernos en un resultado conocido como el Lema de Frostman, que establece que dado un compacto E en $\mathbb{R}^d$ con medida s-dimensional de Hausdorff positiva, es posible encontrar una medida finita μ en E de forma que $\mu(E) > 0$ y $\mu(B(x,r)) \leq br^s$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, siendo b una constante positiva.

Para finalizar vamos a describir brevemente lo que podemos encontrar en cada capítulo.

En el primer capítulo comenzamos viendo la definición y propiedades fundamentales sobre la capacidad analítica. Igualmente, se ofrecen algunos de los resultados que ya se han comentado anteriormente y que servirán de puente para conectar estos conceptos con el de conjunto evitable. En todo momento se irán exponiendo ejemplos comunes sobre conjuntos evitables que servirán, a su vez, para visualizar de forma práctica los dos conceptos fundamentales en los que se basa este tema.

A continuación, encontramos en el Capítulo 2 el desarrollo teórico de la medida de Hausdorff. Ofreceremos las definiciones y propiedades fundamentales, deteniéndonos en su relación con la medida de Lebesgue. Seguidamente, introduciremos el concepto de dimensión de Hausdorff y finalizaremos con el estudio práctico de dos interesantes conjuntos: las curvas rectificables y los conjuntos de Cantor.

En el Capítulo 3 estudiaremos dos relaciones fundamentales entre la longitud de un conjunto y su capacidad analítica. En particular, se probará el Teorema de Painlevé y concluiremos con el desarrollo de un ejemplo en el que se demuestra que la implicación contraria al teorema no siempre es cierta. Dicho ejemplo es el debido a John Garnett, tal y como se ha indicado anteriormente, y el conjunto que estudiaremos con el fin de refutar la implicación contraria al Teorema de Painlevé será el "conjunto de Cantor 4 esquinas", que describiremos en su momento.

Finalmente, en el Capítulo 4 expondremos el concepto de transformada de Cauchy, lo que nos permitirá, a través del Lema de Frostman, demostrar que para conjuntos con dimensión de Hausdorff mayor que uno, la capacidad analítica de dichos conjuntos es positiva. Este resultado fundamental se verá al comienzo del capítulo, mientras que el estudio sobre el Lema de Frostman lo veremos en la segunda parte del mismo. Cabe señalar que la demostración que aquí damos de dicho lema se basa en una convergencia de conjuntos, puesto que comúnmente encontramos en diversas fuentes bibliográficas una prueba basada en la convergencia de medidas. La demostración se puede encontrar en [Fal1] para el caso de $\mathbb{R}$ ($d = 1$). Sin embargo, nosotros la ofrecemos para cualquier dimensión d, para lo que ha sido necesario probar una serie de lemas y resultados previos, algunos de los cuales no hemos encontrado en la literatura.

A modo de conclusión, podemos decir que se han conseguido importantes resultados sobre la capacidad analítica y conjuntos evitables utilizando la dimensión de Hausdorff como herramienta fundamental, aunque como podemos ver en este trabajo la medida de Hausdorff no es suficiente para caracterizar los conjuntos evitables, por lo que es necesario incorporar nuevas propiedades para resolver completamente el problema de Painlevé, que se encuentra aún abierto en toda su generalidad. En algunos casos particulares en los que se ha resuelto, interviene la propiedad de rectificabilidad. Un ejemplo de ello es la llamada Conjetura de Denjoy resuelta por A. Calderón en 1977 ([Cal]), y que establece que un subconjunto de una curva rectificable es evitable si y solo si su medida 1-dimensional de Hausdorff es cero.

Capítulo 1

Conjuntos Evitables y Capacidad Analítica.

1.1. Introducción.

El objetivo de este capítulo es dar a conocer los conceptos y propiedades fundamentales de los conjuntos evitables y de la capacidad analítica. Se estudiarán en secciones distintas pero seguiremos una especie de paralelismo en cuanto a la exposición de ejemplos, con el fin de entender ambos conceptos, así como el funcionamiento de sus propiedades más importantes. También ofreceremos un resultado de gran relevancia en cuanto a equivalencias entre ambos temas, lo que nos permitirá entender qué significa una cosa respecto a la otra. En otras palabras, veremos que la capacidad analítica es una forma de medir el tamaño del conjunto de las funciones analíticas y acotadas fuera de un compacto dado. De esta forma, se probará que el hecho de que la capacidad analítica sea nula equivale a que solamente las constantes están en ese conjunto y a que dicho conjunto es evitable.

Cabe destacar que principalmente el desarrollo de la teoría que se va a ofrecer a continuación está basado en las obras [Tol], [Dud] y [SS1], cuyos detalles se pueden consultar en la bibliografía.

1.2. Resultados previos.

En esta sección vamos a exponer una serie de resultados de variable compleja y topología que serán necesarios a lo largo del desarrollo del tema que vamos a estudiar. Muchos de ellos han sido vistos a lo largo del grado, por lo que únicamente ofreceremos el enunciado entendiendo que la prueba ha sido estudiada en alguno de los cursos. En otras ocasiones, cuando se trate resultados no conocidos en general por la mayoría de personas que finalizan sus estudios, daremos la demostración o, al menos, indicaremos una referencia sobre dónde encontrarla.

Definición 1.2.1. *Una región de $\mathbb{C}$ es un conjunto Ω abierto y conexo. Si $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω en $\mathbb{C}$, su frontera en el plano ampliado $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se denota y se define como sigue:*

$$\partial_\infty \Omega = \begin{cases} \partial\Omega & \textit{si } \Omega \textit{ es acotado.} \\ \partial\Omega \cup \{\infty\} & \textit{si } \Omega \textit{ no es acotado.} \end{cases}$$

Teorema 1.2.2 (Principio del Módulo Máximo)**.** *Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y, f una función no constante y holomorfa definida en dicho abierto. Entonces, $|f|$ no alcanza su máximo en Ω.*

En otras palabras, el Teorema anterior nos dice que si $|f|$ alcanzara su máximo en la región Ω, se trataría de una función constante. Cabe destacar también que, si el abierto del dominio de definición no es conexo, el resultado enunciado es válido en cada una de sus componentes conexas.

A continuación damos una versión del Principio del Módulo Máximo de la que expondremos su prueba.

Teorema 1.2.3. *Sea una región $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorta tal que existe una constante $M \in [0, +\infty)$ que verifica*

$$\limsup_{z \to w} |f(z)| \leq M, \ \textit{para todo } w \in \partial_\infty \Omega. \tag{1.1}$$

Entonces, $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Sea $\delta > 0$. Para probar el teorema bastará verificar que el conjunto

$$G = \{z \in \Omega : |f(z)| > M + \delta\}$$

es el vacío.

Como f es holomorfa en Ω, en particular se trata de una función continua en dicha región y, por composición, $|f|$ también lo es en el mismo lugar. Por tanto, se tiene que el conjunto G es abierto. Debido a que tenemos por hipótesis que

$$\limsup_{z \to w} |f(z)| \leq M,$$

para todo $w \in \partial_\infty \Omega$, existirá un $r > 0$ de forma que $|f(z)| < M + \delta$ para todo $z \in \Omega \cup B(w, r)$, por lo que podemos concluir que $\overline{G} \subset \Omega$. Como esta condición también se cumple si Ω es una región no acotada y $w = \infty$, se tiene que G ha de ser acotado y, por tanto, $\overline{G}$ compacto. Luego, como sabemos que en un compacto toda función continua alcanza su máximo, en particular la función $|f|$ lo alcanza en el compacto $\overline{G}$. Sea ahora un punto $z_0 \in \overline{G}$ de forma que

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \text{para todo } z \in \overline{G}.$$

En particular, tenemos que

$$|f(z_0)| \geq M + \delta \geq |f(z)| \quad \text{para todo } z \in \Omega \setminus G. \tag{1.2}$$

Esto quiere decir que en Ω la función $|f|$ alcanza su máximo en el punto z_0. Aplicando el Principio del Módulo Máximo, tenemos que $|f|$ es una función constante. Esto da lugar a una contradicción con la expresión 1.1, ya que se tendría

$$\limsup_{z \to w} |f(z)| = |f(z_0)| \geq M + \delta > M \quad \text{para todo } w \in \partial_\infty \Omega.$$

De esta forma, podemos concluir que el conjunto G es vacío y, por tanto, $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$. □

Lema 1.2.4 (Lema de Schwarz)**.** *Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad centrado en el origen y $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa verificando $f(0) = 0$. Entonces,*

1. *$|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*
2. *Si existe algún $z_0 \neq 0$ de forma que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces f es un giro.*
3. *$|f'(0)| \leq 1$ y, si se da la igualdad, entonces f es un giro.*

Lema 1.2.5 (Lema de Schwarz generalizado)**.** *Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad centrado en el origen y $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa en $\mathbb{D}$ verificando*

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{k-1)}(0) = 0.$$

Entonces, se tiene que $|f(z)| \leq |z|^k$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Consideramos la función $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida como sigue

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z^k} & \text{si } z \neq 0 \\[2ex] \dfrac{f^{k)}(0)}{k!} & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

holomorfa en todo el disco incluso en el origen, donde se puede ver fácilmente que es diferenciable aplicando sucesivamente la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z^k} = \lim_{z \to 0} \frac{f'(z)}{kz^{k-1}} = \cdots = \lim_{z \to 0} \frac{f^{k)}(z)}{k!} = \frac{f^{k)}(0)}{k!}$$

Ahora bien, dado un valor r fijo de forma que $0 < r < 1$, en la circunferencia $|z| = r$ se tiene que,

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^k} \right| \leq \frac{1}{r^k}$$

Por el Principio del Módulo Máximo, la función $|g(z)|$ alcanza su máximo en la frontera, por lo que, en particular, para un z fijado tal que $|z| < r < 1$ se tiene también la misma desigualdad. Haciendo r tender a 1, obtenemos que

$$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right| \leq 1 \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

lo que es equivalente a decir que $|f(z)| \leq |z|^k$ para todo $z \in \mathbb{D}$, que es lo que se quería probar. □

El resultado anterior se trata de la generalización de uno de los resultados fundamentales que se utilizan en variable compleja. En particular, nosotros haremos uso de los casos $k = 1$ y $k = 2$. Para $k = 1$ el enunciado es equivalente a la primera consecuencia que se enunció en el Lema 1.2.4.

Definición 1.2.6. *Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua. El recorrido de la curva es la imagen de dicha aplicación y se denotará como*

$$\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}. \tag{1.3}$$

Se dirá que la curva es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 1.2.7. *Una curva γ se dice regular si $\gamma'(t)$ existe y es continua para todo $t \in [a, b]$. La curva se dirá regular a trozos si existe una partición del intervalo $[a, b]$ tal que γ es regular en cada intervalo de la partición.*

Definición 1.2.8. *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una curva regular a trozos y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ continua, se define la integral de f a lo largo de γ como:*

$$\int_\gamma f(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definición 1.2.9. *Una cadena Γ es un conjunto finito de curvas $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n\}$. En el caso particular en el que todas las curvas sean cerradas se dirá que Γ es un ciclo. El recorrido de la cadena es el conjunto $\Gamma^* = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j^*$.*

Definición 1.2.10. *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ una cadena y $f : \Gamma^* \to \mathbb{C}$ continua. Se define la integral de f a lo largo de Γ como*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Proposición 1.2.11 (Analiticidad Bajo el Signo de Integral.)**.** *Sean γ una curva en $\mathbb{C}$ y Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Sea la función $g : \Omega \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ continua tal que, para todo $w \in \gamma^*$ la aplicación*

$$\begin{aligned} g_w : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto g(z, w) \end{aligned}$$

es holomorfa en Ω. Si definimos ahora

$$F(z) = \int_\gamma g(z,w)dw, \ \ con\ z \in \Omega,$$

entonces se trata de una función holomorfa en Ω. Además, para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$F^{n)}(z) = \int_\gamma \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(z,w)dw, \ \ para\ todo\ z \in \Omega.$$

Teorema 1.2.12. *Sea un abierto no vacío Ω del plano complejo y un compacto K subconjunto de dicho abierto. Entonces existe un ciclo Γ en $\Omega \setminus K$ de forma que*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1 & si\ z \in K \\ 0 & si\ z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \end{cases}$$

y, por tanto, se satisface la Fórmula Global de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo punto $z \in K$.

Según se ha enunciado, si se cumplen las condiciones arriba descritas sobre el índice respecto al ciclo Γ, se satisface la Fórmula Global de Cauchy. Veamos que la implicación contraria también es cierta, para lo que vamos a considerar las siguientes funciones.

Tomando $f \equiv 1$, se tiene para todo $z \in K$ y gracias a la Fórmula Global de Cauchy que

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-z} dw = \mathrm{Ind}_\Gamma(z)$$

teniéndose la última igualdad por la definición de índice. Por tanto, el valor del índice en los puntos de K coincide con el que se enunció en el Teorema 1.2.12 para ese caso.

Por otra parte, si consideramos $a \notin \Omega$ y un punto $z \in K$, podemos definir la función $f(w) = \dfrac{w-z}{w-a}$, de forma que

$$f(z) = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-a} dw = \mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$

De esta manera, también se tiene el valor del índice esperado. Como para cada a se tiene una función distinta, lo que hemos definido anteriormente son en realidad infinitas funciones con esas características.

Por último, cabe señalar que una demostración para este resultado se puede encontrar en el Capítulo 13 de [Rud].

Teorema 1.2.13 (Teorema de Representación Conforme de Riemann). *Sea Ω una región simplemente conexa en $\mathbb{C}$. Entonces existe un isomorfismo conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$. Además, fijado $z_0 \in \Omega$, el isomorfismo conforme que verifica $\varphi(z_0) = 0$ y $\varphi'(z_0) > 0$ es único.*

La prueba de este resultado puede consultarse en el Capítulo 8 de [SS1].

Definición 1.2.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en Ω se dice que es uniformemente acotada en subconjuntos compactos de Ω si para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C > 0$ de forma que*

$$|f(z)| \leq C \quad \text{para todo } z \in K \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.2.15. *En las condiciones de la definición anterior, una familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en un compacto $K \subset \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de forma que para cualesquiera $z, w \in K$ con $|z - w| < \delta$ se tiene que*

$$|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}.$$

Definición 1.2.16. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en Ω se dice que es normal si toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.*

Teorema 1.2.17 (Teorema de Montel). *Supongamos que $\mathcal{F}$ es una familia de funciones holomorfas en Ω y uniformemente acotada en subconjuntos compactos de Ω. Entonces:*

1. *$\mathcal{F}$ es equicontinua en cada subconjunto compacto de Ω.*
2. *$\mathcal{F}$ es una familia normal.*

A continuación exponemos algunos resultados sobre topología que serán necesarios a lo largo del tema.

Definición 1.2.18. *Un conjunto K es totalmente disconexo si todas sus componentes conexas son unitarias, es decir, si dichas componentes están formadas por, a lo más, un punto.*

Lema 1.2.19. *Sea X un espacio de Hausdorff totalmente disconexo y compacto. Supongamos que C_1 y C_2 son dos subconjuntos compactos de X, disjuntos entre sí. Entonces X puede ser escrito como la unión disjunta de dos subconjuntos cerrados X_1 y X_2 de forma que $C_1 \subset X_1$ y $C_2 \subset X_2$.*

Definición 1.2.20. *Un conjunto clopen en un espacio topológico es un conjunto que es a la vez abierto y cerrado.*

Lema 1.2.21. *Sea K un métrico compacto totalmente disconexo. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ y unos compactos $K_1, K_2, \dots, K_N$ en K dos a dos disjuntos de forma que* $\operatorname{diam} K_j < \varepsilon$ *para todo $j = 1, \dots, N$ y*

$$K = \bigsqcup_{j=1}^{N} K_j.$$

Demostración. Veamos que para todo $a \in K$ existe un conjunto clopen K_a de forma que $a \in K_a$ y $\operatorname{diam} K_a < \varepsilon$. Para ello, basta aplicar el Lema 1.2.19 a los compactos $C_1 = \{a\}$ y $C_2 = K \setminus B(a, \frac{\varepsilon}{3})$. De esta forma debe existir un X_1 con $\{a\} \subset X_1$ y X_2 con $(K \setminus B(a, \frac{\varepsilon}{3})) \subset X_2$ de forma que la unión disjunta de X_1 y X_2 sea todo el compacto K. Como han de ser disjuntos, X_1 debe estar contenido en la bola $B(a, \frac{\varepsilon}{3})$. De esta forma, llamamos $X_1 = K_a$ y, en efecto, tenemos que $\operatorname{diam} K_a < \varepsilon$. Como para cada punto a, K_a es abierto, por argumentos de compacidad podemos garantizar que existen $a_1, \dots, a_N$ de forma que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} K_{a_j}.$$

Como esa unión está formada por conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, ésta sigue siendo un conjunto clopen. Nos disponemos ahora a obtener una serie de conjuntos dos a dos disjuntos de forma que la unión de ellos sea la misma que la anterior. Para ello, consideramos $K_1 = K_{a_1}$. En segundo lugar, definimos $K_2 = K_{a_2} \setminus K_{a_1}$. Como K_{a_2} es clopen, al quitarle otro conjunto K_{a_1} podemos considerar que a un cerrado le quitamos un abierto, por lo que sigue siendo cerrado; o bien, que a un abierto le quitamos un cerrado, por lo que seguiría siendo abierto. En cualquier caso, el nuevo conjunto definido K_2 sigue siendo clopen.

Razonando de forma análoga, obtenemos todos los nuevos conjuntos hasta $K_N = K_{a_N} \setminus \bigcup_{j=1}^{N-1} K_{a_j}$. De esta forma, hemos conseguido que

$$K \subset \bigsqcup_{j=1}^{N} K_j.$$

Como la otra contención siempre se tiene, tenemos la igualdad que se daba en el enunciado. □

Lema 1.2.22 (Lema de Alexander)**.** *Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos de $\mathbb{C}$ y los puntos $z, w \in \mathbb{C}$, de forma que z se conecta con w en Ω_1 y Ω_2. Si $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{C}$, entonces z se conecta con w en $\Omega_1 \cap \Omega_2$.*

El resultado anterior es una de las versiones del Lema de Alexander. No vamos a dar su prueba pero debemos señalar que se puede encontrar en el Teorema 9.1.1. de [New]. Este lema es un resultado no trivial de topología del plano que será útil en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.2.23. *Sea un compacto $K \subset \mathbb{C}$ totalmente disconexo y Ω una región del plano complejo de forma que $K \subset \Omega$. Entonces, $\Omega \setminus K$ es conexo.*

Demostración. Vamos a probar, en primer lugar, que $\mathbb{C} \setminus K$ es un conjunto conexo. Para ello, consideramos dos puntos $x, y \in \mathbb{C} \setminus K$. Sea $\delta > 0$ de forma que $\operatorname{dist}(x, K) > \delta$ y $\operatorname{dist}(y, K) > \delta$.

Como K es totalmente disconexo, por el Lema 1.2.21 sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un valor $N \in \mathbb{N}$ y unos compactos $K_1, \ldots, K_N$ en K de forma que

$$K = \bigsqcup_{j=1}^{N} K_j$$

y cada uno de ellos tiene diámetro menor que ε. Como es para todo $\varepsilon > 0$, tomamos por ejemplo, $\varepsilon = \delta/3$.

Si considero $\mathbb{C} \setminus K_1$, los puntos x e y se pueden seguir conectando en él, ya que, si $z_1 \in K_1$, se tiene que

$$x, y \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}\left(z_1, \frac{\delta}{2}\right) \subset \mathbb{C} \setminus K_1$$

y $\mathbb{C} \setminus \overline{B}\left(z_1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es conexo. Como este razonamiento vale para cualquier par de puntos, $\mathbb{C} \setminus K_1$ es conexo.

Por el mismo motivo, $\mathbb{C} \setminus K_2$ también lo es. Como K_1 y K_2 son disjuntos, tenemos que

$$(\mathbb{C} \setminus K_1) \cup (\mathbb{C} \setminus K_2) = \mathbb{C}.$$

Aplicando el Lema 1.2.22, tenemos que x e y están conectados en su intersección. Pero dicha intersección es justamente $\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2)$.

Razonando ahora con $K_1 \cup K_2$ y K_3, llegamos a x e y están conectados en la intersección de los complementarios de cada compacto, es decir, en $\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3)$. Iterando de esta forma tenemos finalmente que x e y están conectados en

$$\mathbb{C} \setminus (K_1 \cup K_2 \cup \ldots K_N) = \mathbb{C} \setminus K.$$

Pero como este razonamiento es válido para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{C} \setminus K$, deducimos que se trata de un conjunto conexo.

Ahora bien, tenemos que $\mathbb{C} \setminus K$ y Ω son abiertos conexos. Como $K \subset \Omega$, la unión de los dos abiertos anteriores es todo $\mathbb{C}$. Aplicando el Lema 1.2.22, se tendrá que su intersección es conexa. Pero, precisamente, la intersección de dichos abiertos es

$$(\mathbb{C} \setminus K) \cap \Omega = \Omega \setminus K.$$

Luego, hemos demostrado que $\Omega \setminus K$ es conexo. $\square$

1.3. Conjuntos evitables.

Definición 1.3.1. *Un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ se dice evitable para funciones analíticas y acotadas (o simplemente, evitable) si para todo abierto Ω conteniendo a K, toda función analítica y acotada en $\Omega \setminus K$ se puede extender a lo largo de K con el fin de conseguir una extensión analítica de dicha función en todo Ω.*

Estas extensiones analíticas deben ser acotadas en todo Ω debido a que son continuas y acotadas en el compacto K. Por tanto, la definición 1.3.1 es equivalente a lo siguiente: si para cualquier abierto V, $\mathcal{H}^\infty(V)$ denota al conjunto de funciones continuas y acotadas en V, podemos decir que el compacto $K \subset \mathbb{C}$ es evitable si para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ conteniendo a K, todo elemento de $\mathcal{H}^\infty(\Omega \setminus K)$ se extiende a algún elemento de $\mathcal{H}^\infty(\Omega)$.

Un caso particular a esto último es, dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$ evitable y, considerando como abierto el mismo plano complejo, todo elemento de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ se extiende a algún otro de $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C})$. Como se trata de funciones acotadas y holomorfas en todo $\mathbb{C}$ (en particular, enteras), podemos afirmar que $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ se trata del conjunto de las funciones constantes gracias al Teorema de Liouville. Esto da pie al siguiente enunciado.

Lema 1.3.2. *Sea el compacto $K \subset \mathbb{C}$. Si K es evitable, entonces $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ se trata del conjunto de las funciones constantes.*

Una observación que se puede señalar es que un conjunto evitable debe tener interior vacío. Si, por ejemplo, existiera un punto z_0 en el interior del compacto, la función $z \mapsto 1/(z - z_0)$ se trataría de una función no constante, acotada y analítica en $\mathbb{C} \setminus K$. Por el comentario anterior, si esta función se pudiera extender a todo $\mathbb{C}$, sería constante, lo que contradice nuestra hipótesis. Al encontrar una función con estas características que no puede extenderse a todo el plano complejo, podemos afirmar que el compacto K, con interior no vacío, no es evitable.

De esta última propiedad se pueden deducir diversas consecuencias, aunque no entremos en los detalles de la prueba. Por ejemplo, para la norma del supremo, la extensión de cualquier elemento de $\mathcal{H}^\infty(\Omega \setminus K)$ a un elemento de $\mathcal{H}^\infty(\Omega)$ da lugar a que la norma de ambos siga siendo la misma. Esto quiere decir que ambos espacios son isométricos. De aquí se explica la terminología: el hecho de que Ω "evite o excluya" K de sí mismo a la hora de tratar con funciones holomorfas y acotadas, no va a encontrar diferencia alguna con el conjunto $\mathcal{H}^\infty(\Omega)$.

Otra propiedad que posee un conjunto evitable K es que su complementario debe ser conexo. Supongamos que no fuera así, de forma que $\mathbb{C} \setminus K$ sea unión de varias componentes cuyas intersecciones entre sí sean vacías. Consideramos la siguiente aplicación

$$g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \text{ está en la componente no acotada de } \mathbb{C} \setminus K \\ 0 & \text{si } z \text{ está en alguna de las componentes acotadas de } \mathbb{C} \setminus K. \end{cases}$$

que se trata de una función no constante, acotada y analítica en el complementario del compacto. Si se pudiera extender de forma analítica a todo $\mathbb{C}$, se trataría de una función constante por el Teorema de Liouville, lo que contradice una de las características de la función que acabamos de nombrar.

De nuevo, estos razonamientos que se han desarrollado dan lugar a la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea K un compacto del plano complejo de forma que el conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ es el de las funciones constantes. Entonces, se tiene que*

1. $\mathring{K} = \emptyset$
2. $\mathbb{C} \setminus K$ *es conexo.*

En particular, si K es evitable, se tienen las mismas propiedades.

A continuación, estudiaremos los ejemplos más comunes de conjuntos evitables y no evitables.

Ejemplo 1.3.4. El primer conjunto evitable con el que nos encontramos es cualquier punto. Es sencillo verlo gracias a resultados de variable compleja, a través de los cuales sabemos que cualquier función analítica y acotada en un entorno reducido del punto puede ser extendida de forma analítica a todo el entorno, incluyendo el punto, pues no es más que una singularidad aislada evitable. A pesar de esta justificación, vamos a desarrollar a continuación una pequeña prueba que avale el ejemplo.

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ arbitrario y f una función analítica y acotada en $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, es decir, en el disco abierto de centro z_0 y radio r con un agujero en dicho centro. Consideramos la función g definida como sigue:

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Gracias a que $f(z)$ está acotada en su dominio de definición, se puede comprobar que $g(z)$ es diferenciable en z_0 con derivada nula en dicho punto. De hecho,

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

Por tanto, la función $g(z)$ es analítica en todo el abierto $B(z_0, r)$ y, por tanto, permite un desarrollo en serie de potencias en torno a z_0, de forma que

$$g(z) = (z - z_0)^2 f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots$$

Como $g(z_0) = 0$, se verifica que $a_0 = 0$. De la misma forma, si $g'(z_0) = 0$ tal y como se ha comprobado más arriba, se tiene que $a_1 = 0$. Por tanto, la serie resultante queda de la siguiente forma:

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + a_4(z - z_0)^4 + a_5(z - z_0)^5 + \cdots$$

Dividiendo entre el factor común $(z - z_0)^2$, obtenemos la serie de potencias para $f(z)$,

$$f(z) = a_2 + a_3(z - z_0) + a_4(z - z_0)^2 + a_5(z - z_0)^5 + \cdots$$

de manera que nuestra función ha quedado extendida de forma analítica en un entorno de z_0 con el valor a_2 en dicho punto y, de nuevo, al ser diferenciable en torno al punto z_0, la derivada en dicho lugar es a_3.

Ejemplo 1.3.5. A modo de consecuencia del ejemplo anterior, demostrado por Riemann, sabemos que una colección finita de puntos es evitable. Además, por el Teorema de Categoría de Baire, se puede extender al caso de conjuntos numerables y compactos. Una idea de la prueba de esto último se encuentra en la Sección 1.1 de [Dud].

Nosotros no entraremos en estos detalles puesto que ofreceremos resultados mucho más fuertes, en el sentido de que lo anterior será consecuencia de lo que probaremos. Dichos resultados se basarán en el estudio del Teorema de Painlevé.

Ejemplo 1.3.6. El disco $\overline{B}(z_0, r)$ no es evitable. Para verlo, podemos utilizar la propiedad nombrada anteriormente que establecía que cualquier compacto cuyo interior fuera no vacío no podía ser evitable. De la misma forma a como se hizo antes, basta considerar la función analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, r)$, $f(z) = 1/(z - z_0)$, que no permite una extensión analítica a todo el disco.

Ejemplo 1.3.7. Sea ahora nuestro compacto K el segmento $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entendiéndose que $a < b$. Consideramos la transformación de Möbius

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} \setminus [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ z &\longmapsto \frac{z - a}{z - b} \end{aligned}$$

Denotamos por Ω al conjunto $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ y, considerando la raíz cuadrada principal, definimos la función compuesta $g(z) = \sqrt{T(z)}$ de forma que

$$g(\Omega) \subset \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}.$$

Es importante señalar que para la definición de g se toma la rama principal de la raíz cuadrada. Por último y, teniendo garantía de que está bien definida, consideramos la función

$$\frac{1}{g(z) + 1}.$$

Hemos definido una función acotada, no constante y analítica en $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Como, evidentemente, la función que tenemos no es constante, al no serlo g, tenemos gracias a los resultados vistos hasta ahora, que el compacto $[a, b]$ no es evitable.

Como a y b son números arbitrarios, verificando que $a < b$, podemos afirmar que ningún segmento es evitable.

Algunos resultados en los que no nos vamos a detener muestran como algunos conjuntos compactos del plano que son no numerables o totalmente disconexos son evitables, mientras que otros no lo son. Uno de los ejemplos más comunes es el conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor de razón un tercio es evitable, mientras que cualquier otro no tiene por qué serlo.

Proposición 1.3.8. *Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ de forma que se verifica que el conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ es el formado por las funciones constantes. Entonces, K es totalmente disconexo.*

En particular, si un compacto K es evitable, entonces K es totalmente disconexo.

Demostración. Supongamos que existe una componente conexa L de K que contiene más de un punto. Ante esta hipótesis y, debido a que $\mathbb{C} \setminus L$ es conexo, se tiene gracias al Teorema de Representación Conforme de Riemann que existe una aplicación biyectiva $f : \mathbb{C}_\infty \setminus L \to \mathbb{D}$. Por tanto, se trata de una función holomorfa y acotada pero que no es constante en $\mathbb{C} \setminus L$. Luego, en el conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus L)$ aparecen funciones que no son constantes.

Ahora bien, como $L \subset K$, se tiene que $\mathbb{C} \setminus K \subset \mathbb{C} \setminus L$. Por tanto, dada una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C} \setminus L$, lo es también en $\mathbb{C} \setminus K$, teniéndose la siguiente relación

$$\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus L) \subset \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K).$$

Como en el conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus L)$ encontrábamos funciones no constantes, también pertenecen a $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$, lo que supone una contradicción con la hipótesis de la proposición.

Por tanto, la hipótesis de que K contenía un conjunto conexo formado por más de un punto no es cierta, pudiéndose afirmar finalmente que el compacto inicial K es totalmente disconexo. $\square$

Entre este capítulo y otros que siguen posteriormente daremos una noción de "tamaño" para estos compactos. En concreto, hablaremos de la capacidad analítica y de las medidas de Hausdorff, siendo este último concepto una condición no suficiente para establecer si un conjunto es evitable o no pero que, sin embargo, ofrece un sentido geométrico a dicha propiedad de los compactos. En muchas ocasiones, la propiedad de que el conjunto sea rectificable es fundamental para establecer si es evitable o no.

El siguiente resultado se trata de uno de los fundamentales y de mayor relevancia en el tema que estamos estudiando, pues expone diversas equivalencias sobre los conjuntos evitables y sus propiedades.

Proposición 1.3.9. *Sea el compacto $K \subset \mathbb{C}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) K es evitable para funciones analíticas y acotadas.

b) Existe un abierto Ω con $K \subset \Omega$ de forma que toda función analítica y acotada en $\Omega \setminus K$ posee una extensión analítica a Ω.

c) Toda función analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ es constante.

Demostración. $a) \Longrightarrow b)$ Si K es evitable, siguiendo su propia definición, tenemos que para todo abierto Ω con $K \subset \Omega$, toda función analítica y acotada en $\Omega \setminus K$ se puede extender analíticamente a todo Ω. En particular, existe un abierto verificando dichas condiciones, por lo que se tiene el apartado b).

$b) \Longrightarrow c)$ Sea $f : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ analítica y acotada, consideramos su restricción a $\Omega \setminus K$. Por hipótesis, la función permite una extensión analítica y acotada a todo Ω y, por tanto, f se extiende a todo $\mathbb{C}$. Gracias al Teorema de Liouville, toda función entera y acotada es constante, de donde se sigue el resultado.

$c) \Longrightarrow b)$ Para probar esta implicación basta considerar como Ω el propio plano complejo.

$c) \Longrightarrow a)$ Finalizamos la prueba con esta última implicación.

Consideramos un abierto arbitrario Ω de forma que $K \subset \Omega$ y tomamos la función $f : \Omega \setminus K \to \mathbb{C}$ analítica y acotada, es decir, $f \in \mathcal{H}^\infty(\Omega \setminus K)$. Podemos suponer que el abierto es conexo pues, en caso de no serlo, estudiaríamos cada una de sus componentes conexas de forma individual. Por tanto, $\Omega \setminus K$ es conexo al ser K totalmente disconexo (Teorema 1.2.23). Esto se debe a que, nuestra hipótesis $c)$ nos dice que el conjunto $\mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ es el de las funciones constantes y gracias a la Proposición 1.3.8 se tiene que K es totalmente disconexo.

Fijamos ahora nuestro objetivo en demostrar y justificar la existencia de dos funciones, f_1 y f_2, de forma que $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$ y se verifique la siguiente relación

$$f_1(z) - f_2(z) = f(z) \quad \text{para todo } z \in \Omega \setminus K.$$

Además, demostraremos que $f_2(z)$ se trata de una función acotada en su dominio de definición. En concreto, $f_2 \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$. Por hipótesis, toda función analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ es constante, por lo que f_2 es una aplicación con dicha forma. Por otra parte, probaremos que

$$\lim_{z \to \infty} f_2(z) = 0,$$

por lo que se tendrá que $f_2(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

Gracias a ello y a la construcción que se hizo al inicio, llegaremos a que

$$f(z) = f_1(z) \quad \text{para todo } z \in \Omega \setminus K$$

pero, al ser $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$, se tendrá también para la función f, por lo que, de esta forma, habremos conseguido una extensión analítica de f a todo Ω.

Comenzamos, por tanto, con la construcción de dichas funciones.

Fijamos un punto $z \in \Omega$. Por el Teorema 1.2.12 podemos afirmar que existe un ciclo Γ_1 en $\Omega \setminus (K \cup \{z\})$ de forma que se cumple que $\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = 1$ para todo $w \in K \cup \{z\}$ y $\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. En definitiva, tenemos la garantía de la existencia de un ciclo que rodea a $K \cup \{z\}$ en el abierto Ω. Con todo ello, definimos ahora una función $f_1(z)$ de la siguiente forma

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Vamos a comprobar ahora que dicha función está bien definida, es decir, que su definición no depende del ciclo escogido siempre que cumpla los requisitos que se piden.

Para ello, supongamos que se define $f_1(z)$ para el ciclo Γ_1 y $f_1'(z)$ para el ciclo Γ_1', verificando ambas curvas las condiciones que se pidieron al principio. Estas eran:

$$\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \text{Ind}_{\Gamma_1'}(w) = 1 \quad \text{para todo } w \in K \cup \{z\}$$

y,

$$\text{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \text{Ind}_{\Gamma_1'}(w) = 0 \quad \text{para todo } w \in \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Si consideramos el ciclo de la diferencia, $\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_1')$, se satisface que $\text{Ind}_\Gamma(w) = 0$ para todo $w \in K \cup \{z\}$ e $\text{Ind}_\Gamma(w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Aplicando la Forma Global del Teorema de Cauchy a la función $w \to \frac{f(w)}{z-w}$ deducimos que

$$0 = f_1(z) - f_1'(z)$$

de forma que se tiene la igualdad entre las dos funciones que se definieron para ciclos que cumplían la misma propiedad en cuanto a los índices.

Luego, podemos concluir que nuestra función f_1 está bien definida. Estudiemos ahora su analiticidad.

Sea, para ello, la curva Γ_1 en $\mathbb{C}$ y un valor $\delta > 0$ de forma que $B(z,\delta) \cap \Gamma_1^* = \emptyset$ y $B(z,\delta) \subset \Omega$. Consideramos la función $g : B(z,\delta) \times \Gamma_1^* \to \mathbb{C}$ tal que para todo $w \in \Gamma_1^*$ se define la siguiente función:

$$\begin{aligned} g_w : B(z,\delta) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow \frac{f(w)}{w-z} \end{aligned}$$

Tenemos que dicha función es holomorfa en $B(z,\delta)$ y, por el Teorema de Analiticidad Bajo el Signo de Integral, f_1 es holomorfa en la misma bola. Como z es un punto arbitrario de Ω, concluimos que $f_1 \in \mathcal{H}(\Omega)$.

A continuación vamos a desarrollar un procedimiento análogo a este para definir nuestra segunda función.

Fijamos ahora $z \in \mathbb{C}\backslash K$. De nuevo, gracias al Teorema 1.2.12, sabemos que existe un ciclo Γ_2 en $\Omega\backslash(K \cup \{z\})$ de forma que se tiene $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(w) = 1$ para todo $w \in K$ y $\mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(w) = 0$ para todo $w \in (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{z\}$. En este caso, el Teorema nos garantiza que existe un ciclo que rodea al compacto K pero no al punto z.

Observando ahora la construcción de ambos ciclos, tenemos que ambos rodean al compacto de forma que Γ_2 está más cerca que Γ_1 de K y, el punto z fijado al principio se encuentra entre el recorrido de ambos.

Denotamos en esta ocasión como $f_2(z)$ a la siguiente función

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Sin entrar en detalles, se demuestra de forma análoga a la vez anterior que la funcion f_2 es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus K$, utilizando el Teorema de Analiticidad Bajo el Signo de Integral. Igualmente, se justifica siguiendo el mismo procedimiento, que la función f_2 está bien definida. Es decir, consideramos dos ciclos distintos verificando las condiciones exigidas y definiendo, cada uno de ellos, una función distinta. Considerando el ciclo de la diferencia y aplicando la Forma Global del Teorema de Cauchy se llega a que ambas funciones resultan ser iguales para todo valor de $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

Una vez que hemos definido ambas funciones, vamos a estudiar la relación existente entre ellas en $\Omega \setminus K$. Sea $z \in \Omega \setminus K$ y dados Γ_1 y Γ_2 definidos como antes, consideramos el ciclo Γ de forma que $\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$. Se trata, por tanto, de un ciclo homólogo a cero en $\Omega \setminus K$, es decir,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(w) = 0 \;\; \forall\, w \in (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup K = \mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus K).$$

Recapitulando todas las herramientas de las que disponemos, hemos obtenido un ciclo homólogo a cero en $\Omega \setminus K$, f holomorfa y acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ (en particular, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$) y $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$. Aplicando la Forma Global del Teorema de Cauchy tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\mathrm{Ind}_\Gamma(z)} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw \right) = f_1(z) - f_2(z). \end{aligned}$$

siendo $f_1(z), f_2(z)$ las dos funciones que construimos al principio

Es claro que

$$f_2(\infty) = \lim_{z\to\infty} f_2(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \lim_{z\to\infty} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

donde podemos utilizar el Teorema de Convergencia Dominada para intercambiar límite e integral, y el hecho de que f es una función acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ a la hora de calcular el límite. Basta comprobar que la función es acotada en su dominio de definición para concluir la prueba de la proposición.

Para ello, consideramos el compacto $K_\delta = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(w, K) \leq \delta\} \subset \Omega$, tenemos que f y f_1 son funciones acotadas en $(\Omega \setminus K) \cap K_\delta$, es decir, f_1 es función acotada en un entorno de la frontera de K. Por la relación $f_2 = f_1 - f$, se tiene que f_2 es una función acotada en la misma región y, utilizando el Principio del Máximo y el hecho de que $\lim\limits_{z\to\infty} f_2(z) = 0$, se verifica también que $f_2 \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$.

Debido a estas dos últimas consecuencias se tiene que $f_2 \equiv 0$, por lo que finalmente, $f_1 = f \in \mathcal{H}^\infty(\Omega)$, llegando de esta forma a una extensión analítica de f a todo Ω.

$\square$

Corolario 1.3.10. *Dado un conjunto K evitable y un subconjunto suyo L, se tiene que L también es evitable.*

Demostración. Consideramos el abierto Ω conteniendo a K y, por tanto, a L. Sea $f \in \mathcal{H}^\infty(\Omega \setminus L)$, es decir, una función analítica y acotada en el complementario de L. Como $\Omega \setminus K \subset \Omega \setminus L$, en particular, f es analítica y acotada en $\Omega \setminus K$. Por ser K evitable y, utilizando el resultado anterior, la función f admite una extensión analítica a todo Ω. Por tanto, como la función ha sido escogida de forma arbitraria, tenemos que toda función analítica y acotada en $\Omega \setminus L$ posee una extensión analítica a Ω. Equivalentemente, L es evitable. □

Antes de comenzar a tratar otros conceptos, veamos la siguiente caracterización de conjuntos evitables.

Proposición 1.3.11. *Un subconjunto compacto K de $\mathbb{C}$ es evitable si y, solamente si, para todo abierto U subconjunto de $\mathbb{C}$, toda función acotada y analítica en $U \setminus K$ se prolonga a través de K con el fin de obtener una extensión analítica de la función en todo U.*

Demostración. Es claro, por la definición de conjunto evitable, que la implicación hacia la izquierda se tiene de forma inmediata.

Por otra parte, la implicación hacia la derecha sería también trivial si el compacto estuviera totalmente contenido en el abierto o si, en otro caso, la intersección de ambos conjuntos fuera vacía. Por tanto, hay que estudiar y probar el caso en el que la intersección $K \cap U$ no es ni el vacío ni el propio K.

Supongamos que K es evitable, U es abierto y $f \in \mathcal{H}^\infty(U \setminus K)$. Dado $\varepsilon > 0$, definimos los conjuntos $C_1(\varepsilon) = \{z \in K \text{ tal que } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U) \geq \varepsilon\}$ y $C_2 = K \setminus U$. Como los puntos de $C_1(\varepsilon)$ pertenecen a $K \cap U$, tenemos que los dos conjuntos que hemos definido son disjuntos entre sí y subconjuntos de K. Aplicando el Lema 1.2.19 , el compacto K puede ser escrito como unión disjunta de dos subconjuntos cerrados $K_1(\varepsilon)$ y $K_2(\varepsilon)$ de forma que $C_1(\varepsilon) \subset K_1(\varepsilon)$ y $C_2 \subset K_2(\varepsilon)$. Como por el Corolario 1.3.10 sabemos que cualquier subconjunto compacto de un conjunto evitable es también evitable, se tiene que $K_1(\varepsilon)$ es evitable. Por tanto, como $f \in \mathcal{H}^\infty(\{U \setminus K_2(\varepsilon)\} \setminus K_1(\varepsilon))$ y $U \setminus K_2(\varepsilon)$ es un abierto del plano complejo que contiene a $K_1(\varepsilon)$, se tiene que la función f se extiende de forma analítica a todo $U \setminus K_2(\varepsilon)$ a través de una función f_ε.

Dado ahora cualquier $z \in U$, se tiene que $f_\varepsilon(z)$ está bien definido siempre que $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U)$. Como K es evitable, su interior es vacío. Debido a esto, los valores de $f_\varepsilon(z)$ para los diversos valores de ε son iguales debido a que están determinados por el límite de $f(w)$ cuando $w \in U \setminus K$ tiende a z. Por tanto, podemos definir correctamente una extensión f_0 de f en el abierto U tomando $f_0(z) = f_\varepsilon(z)$, para todo ε verificando $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus U)$. Tal y como se ha definido, la función f_0 es analítica en todo U y, con ello, damos por probado el resultado. □

1.4. Definición y propiedades de la Capacidad Analítica.

Para esta nueva sección consideramos un compacto K y una función holomorfa en su complementario, es decir, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$. Con estas condiciones, tenemos que la función f tiene en el ∞ una singularidad aislada. Si además, f es acotada, o sea, $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K)$ podemos asegurar gracias a resultados de variable compleja que esa singularidad es evitable.

Gracias a ello, podemos definir el valor de f y de su derivada en el ∞, y lo hacemos como sigue:

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) \tag{1.4}$$

y, por otra parte,

$$f'(\infty) = \lim_{z \to \infty} z(f(z) - f(\infty)). \tag{1.5}$$

Considerar el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ en ∞ es equivalente a estudiar el desarrollo de $f(\frac{1}{w})$ en un entorno de 0. Como $f(z)$ posee una singularidad evitable en ∞, podemos afirmar ahora que a $f(\frac{1}{w})$ le corresponde una singularidad evitable en 0. Su serie de Laurent será de la forma

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n w^n$$

donde los coeficientes vienen dados por la expresión

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

siendo $|z| = \rho$ la circunferencia de radio ρ, siendo este valor lo suficientemente grande como para envolver al compacto K. Cabe señalar que bastaría considerar cualquier curva rectificable Γ con orientación apropiada que envolviera al compacto.

Gracias a resultados de variable compleja, sabemos que dada la serie de Laurent de la función $f(\frac{1}{w})$ en un entorno de 0, $a_n = 0$ para todo $n < 0$ si y sólo si 0 es una singularidad evitable. Como se cumple esta propiedad, tenemos que la serie es de la forma

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

Haciendo el cambio $\frac{1}{w} = z$, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

es el desarrollo de Laurent de f en un entorno del ∞.

Gracias a esto podemos deducir que $f(\infty) = a_0$, luego

$$f(z) - f(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

y, por tanto,

$$z(f(z) - f(\infty)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-1}} = a_1 + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z^2} + \cdots$$

Finalmente, gracias a la definición de derivada en el infinito, se concluye que

$$f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) = a_1.$$

Como el coeficiente a_1 se corresponde con la potencia z^{-1} del desarrollo en serie de Laurent de la función en ∞, podemos deducir a partir de la expresión de los coeficientes que ofrece el Teorema de Laurent que

$$f'(\infty) = a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)dz. \tag{1.6}$$

En resumen, hemos deducido que $f(\infty) = a_0$ y $f'(\infty) = a_1$, siendo ambos números los dos primeros coeficientes del desarrollo de Laurent de f en un entorno de ∞.

Una vez que se han expuesto las herramientas con las que trabajaremos en esta parte del capítulo, continuamos presentando los conceptos y resultados fundamentales para el desarrollo teórico del tema.

Definición 1.4.1. *Sea K un compacto de $\mathbb{C}$. Una función $f : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ se dice que es admisible para K si es analítica y acotada en módulo por 1 en $\mathbb{C} \setminus K$, es decir, $|f| \leq 1$.*

Definición 1.4.2. *Sea el conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$. Se define la capacidad analítica de K como*

$$\gamma(K) := \sup |f'(\infty)| \tag{1.7}$$

tomando el supremo en el conjunto de todas las funciones admisibles para K.

En resumen, el concepto que acabamos de definir se puede entender como

$$\gamma(K) = \sup\{|f'(\infty)| \text{ tal que } f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K) \text{ con } \|f\|_\infty \leq 1\}. \tag{1.8}$$

En otras palabras, la capacidad analítica es un valor que expresa “cómo de grande” puede ser una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C} \setminus K$. O, dicho de otra forma, la capacidad analítica cuantifica el tamaño de la bola unidad en el espacio de funciones analíticas y acotadas en el complementario de K.

Este concepto fue introducido por Lars Ahlfors en la década de los años 40 del siglo pasado mediante el estudio de la propiedad de algunos conjuntos de ser evitables. Gracias a su trabajo, demostró la equivalencia de un compacto entre ser evitable y tener capacidad analítica nula, que veremos a continuación. Además, introdujo el concepto de función de Ahlfors, que también mencionaremos a lo largo de la sección.

Proposición 1.4.3. *Sea el compacto $K \subset \mathbb{C}$. Se tiene que $\gamma(K) = 0$ si, y solamente si, K es evitable.*

Demostración. La implicación hacia la izquierda es la más sencilla de probar. Si el compacto K es evitable, por la Proposición 1.3.9 toda función analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus K$ es constante, por lo que, en particular, la derivada de toda función en el ∞ es nula. Por tanto, la capacidad analítica es el supremo de un conjunto cuyos elementos son todos nulos. Consecuentemente, $\gamma(K) = 0$.

Para la implicación contraria utilizaremos también la Proposición 1.3.9. Para ello, consideramos el compacto $K \subset \mathbb{C}$ con $\gamma(K) = 0$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe una función analítica y acotada $f : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ que no es constante, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus K$ de forma que $f(z_0) \neq f(\infty)$. Sea ahora la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ para todo } z \neq z_0,$$

verificándose que $g(z_0) = f'(z_0)$. Gracias a que f está acotada, se tiene la misma propiedad para g en $\mathbb{C} \setminus K$. De hecho, si $z \in \overline{B}(z_0, \delta)$ para cierto $\delta > 0$, tenemos que, para cierto $M_1 > 0$

$$|g(z)| \leq M_1 \quad \text{ para todo } z \in \overline{B}(z_0, \delta),$$

ya que en ese caso g se trata de una función continua en el compacto $\overline{B}(z_0, \delta)$.

Si, por el contrario, $z \in (\mathbb{C} \setminus K) \setminus B(z_0, \delta)$, se tiene que f es acotada en ese dominio, al serlo en $\mathbb{C} \setminus K$. Tomando como M una cota superior para la función en valor absoluto se tiene que

$$|g(z)| \leq \frac{|f(z)| + |f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \frac{2M}{\delta},$$

puesto que $|z - z_0| \geq \delta$. Por tanto, se ha probado que g está acotada en su dominio de definición.

Además, $g(\infty) = 0$ y, por definición, $g'(\infty) = f(\infty) - f(z_0) \neq 0$. Consideramos ahora la función $g_1(z) = \varepsilon g(z)$ para algún $\varepsilon > 0$. Esta función verifica todas las propiedades que se tenían para g y, además, $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus K$ si ε es suficientemente pequeño. Luego, hemos encontrado una función admisible para K cuya derivada en el ∞ es estrictamente positiva. Por tanto, $\gamma(K) > 0$, lo que supone una contradicción con nuestra hipótesis de partida.

De ello deducimos que toda función analítica y acotada en $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ es constante y, de forma equivalente, K es evitable gracias a la proposición nombrada anteriormente. $\square$

Gracias a las herramientas con las que ya contamos podemos aproximar la capacidad analítica de diversos conjuntos. Por ejemplo, es casi inmediata la comprobación de que la capacidad analítica de un punto cualquiera es 0. Por otra parte, existen conjuntos cuya capacidad analítica es no nula, como vemos a continuación.

Ejemplo 1.4.4. Vamos a ver que la capacidad analítica del compacto $B = \overline{B}(0, r)$ para $r > 0$ es estrictamente positiva. Consideramos la función $f : \mathbb{C}^\infty \setminus B \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{r}{z}$, analítica en $\mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$, en particular, analítica en su dominio de definición. Además, como los valores que toma satisfacen que $|z| \geq r$, se cumple que $|f| \leq 1$. Por tanto, se tiene lo siguiente:

$$f'(\infty) = \lim_{z \to \infty} z(f(z) - f(\infty)) = \lim_{z \to \infty} z\left(\frac{r}{z} - 0\right) = r$$

Como la capacidad analítica toma el supremo en un conjunto en el que se encuentra la función anterior, podemos concluir que $\gamma(B) \geq |f'(\infty)| = r > 0$.

Definición 1.4.5. *La frontera exterior de un compacto K, $\partial_0 K$, es la frontera de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$. Evidentemente, $\partial_0 K \subset \partial K$.*

Proposición 1.4.6. *Sean K, L dos compactos de $\mathbb{C}$,*

(a) Si $K \subset L$, entonces $\gamma(K) \leq \gamma(L)$. Es decir, la capacidad analítica es monótona.

(b) Para todo $z, \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\gamma(z + \lambda K) = |\lambda|\gamma(K).$$

En otras palabras, aplicar una traslación a un compacto no da lugar a ninguna variación respecto a la capacidad analítica, mientras que aplicarle una homotecia provoca que este valor quede multiplicado por la razón, en valor absoluto, de dicha transformación.

(c) Para todo compacto $K \in \mathbb{C}$

$$\gamma(\hat{K}) = \gamma(K) = \gamma(\partial K) = \gamma(\partial_0 K) = \gamma(\partial \hat{K}).$$

donde $\hat{K}$ es la unión del compacto K con las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$. Lo que esta propiedad establece es que la capacidad analítica de un compacto depende unicamente de la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$.

Demostración. (a) Sea $f : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ una función admisible para K, es decir,

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Por hipótesis, $K \subset L$, por lo que $\mathbb{C} \setminus L \subset \mathbb{C} \setminus K$. Esto quiere decir que nuestra función es también admisible para L puesto que las propiedades que satisface para $\mathbb{C} \setminus K$ las cumplirá, en particular, para cualquier subconjunto suyo, en este caso $\mathbb{C} \setminus L$.

Con esto hemos probado que toda función admisible para K lo es para L o, equivalentemente, el conjunto de funciones admisibles para K está contenido en el conjunto de funciones admisibles para L. Considerando la derivada en el ∞ de estas funciones y tomando supremo, se tiene que

$$\gamma(K) \leq \gamma(L),$$

que es lo que se quería probar.

(b) Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a + \lambda z \end{aligned}$$

siendo $a, \lambda \in \mathbb{C}$, de forma que $T(K) = a + \lambda K = F$. Entonces, si restringimos el dominio de la aplicación anterior, $T : \mathbb{C} \setminus K \longrightarrow \mathbb{C} \setminus F$, obtenemos un isomorfismo, lo que nos garantiza la existencia de la función T^{-1}.

Tengamos ahora en cuenta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \setminus K \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g \circ T"'] & \mathbb{C} \setminus F \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces que una función cualquiera g es admisible para el compacto F si y solo si la función $g \circ T$ lo es para K. De hecho, si g es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus F$, por composición de funciones analíticas se tiene que $g \circ T$ lo es para su dominio de definición, $\mathbb{C} \setminus K$.

En segundo lugar, si tenemos que

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus F,$$

en particular se satisface que

$$|(g \circ T)(z)| = |g(T(z))| \leq 1 \quad \text{para todo } T(z) \in \mathbb{C} \setminus F.$$

Si $T(z) \in \mathbb{C} \setminus F$, se tiene de inmediato, gracias a la construcción que hemos hecho, que $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Por tanto,

$$|(g \circ T)(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus K.$$

Teniendo en cuenta que $T(z)$ tiende a ∞ cuando z tiende a ∞, tenemos que

$$\begin{aligned} z[(g \circ T)(z) - (g \circ T)(\infty)] &= \frac{z}{T(z)}[T(z)(g(T(z)) - g(T(\infty)))] = \\ &= \frac{z}{a + \lambda z}[T(z)(g(T(z)) - g(\infty))] \end{aligned}$$

Haciendo tender z a ∞, obtenemos la definición de derivada en el infinito de las funciones $g \circ T$ y g, es decir,

$$(g \circ T)'(\infty) = \frac{1}{|\lambda|} g'(\infty).$$

Tomando valor absoluto de dichas funciones y considerando el supremo entre todas las funciones admisibles para K en el término de la izquierda de la igualdad, y las admisibles para F en el término de la derecha se llega a

$$\gamma(K) = \frac{\gamma(F)}{|\lambda|} = \frac{\gamma(a + \lambda K)}{|\lambda|}, \quad \text{para todo } a, \lambda \in \mathbb{C},$$

que es lo que queríamos probar.

(c) Por definición, tenemos que

$$\partial \hat{K} = \partial_0 K \subset \partial K \subset K \subset \hat{K}$$

y, por tanto, gracias a la monotonía de la capacidad analítica se satisface

$$\gamma(\partial \hat{K}) = \gamma(\partial_0 K) \leq \gamma(\partial K) \leq \gamma(K) \leq \gamma(\hat{K}).$$

Si probamos que $\gamma(\hat{K}) \leq \gamma(\partial\hat{K})$ conseguiremos que todas las desigualdades expresadas arriba sean realmente igualdades.

Consideramos una función g admisible para $\hat{K}$. A partir de ésta, definimos la siguiente aplicación

$$g_1(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \hat{K} \\ 0 & \text{si } z \in \overset{\circ}{\hat{K}} \end{cases}$$

Como $\overset{\circ}{\hat{K}}$ y $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ son abiertos disjuntos y su unión es $\mathbb{C} \setminus \partial\hat{K}$ se tiene que, la función $g_1(z)$ es holomorfa en este último conjunto. Más aún, podemos afirmar que la función es admisible para $\partial\hat{K}$.

La propiedad de analiticidad en el complementario se tiene por el último comentario que hemos hecho. Por otro lado, no es difícil comprobar que

$$|g_1(z)| \leq |g(z)| \leq 1 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \hat{K},$$

ya que g es admisible para $\hat{K}$ por hipótesis.

Además, tenemos que la derivada en el infinito de ambas funciones coinciden. De hecho,

$$g_1'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(g_1(z) - g_1(\infty)) = \lim_{z\to\infty} z(g(z) - g(\infty)) = g'(\infty).$$

Cabe señalar que hemos utilizado la definición de $g_1(z)$ es $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ porque nos interesa su valor en el infinito. Además, en la otra rama en la que está definida, dicha función es nula.

Tomando valor absoluto y considerando el supremo entre todas las funciones admisibles para $\partial\hat{K}$, tenemos que

$$|g'(\infty)| \leq \gamma(\partial\hat{K}) \quad \text{para toda } g \text{ admisible para } \hat{K}.$$

Tomando ahora supremo entre todas las funciones admisibles para $\hat{K}$, llegamos a la desigualdad

$$\gamma(\hat{K}) \leq \gamma(\partial\hat{K}),$$

y, con ella, podemos afirmar que

$$\gamma(\partial\hat{K}) = \gamma(\partial_0 K) = \gamma(\partial K) = \gamma(K) = \gamma(\hat{K}),$$

como se quería demostrar.

$\square$

La propiedad de monotonía de la capacidad analítica da lugar a pensar en cómo definir la capacidad analítica de un conjunto cualquiera, sin necesidad de que éste sea compacto. Para cualquier conjunto del plano A se tendrá que

$$\gamma(A) \geq \gamma(K)$$

para todo K compacto contenido en A. En particular, la desigualdad será válida para el supremo de la capacidad analítica tomada entre todos los compactos contenidos en A. Formalmente, podemos exponer la siguiente definición.

Definición 1.4.7. *Sea un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{C}$. Se define la capacidad analítica de A como*

$$\gamma(A) = \sup_{K \subset A, K \text{ compacto}} \gamma(K).$$

La siguiente caracterización sobre capacidad analítica se utilizará de aquí en adelante en numerosas ocasiones.

Proposición 1.4.8. *Sea el compacto $K \subset \mathbb{C}$. El supremo de la Definición 1.4.2 se alcanza. Además, si $\gamma(K) > 0$, cualquier función admisible para K en la que se alcance dicho supremo satisface que $f(\infty) = 0$.*

Demostración. En primer lugar, para ver que el supremo se alcanza y, por tanto, se trata de un máximo, basta tener en cuenta que la familia de funciones admisibles para K están acotadas en valor absoluto por 1 en $\mathbb{C} \setminus K$, por lo que se trata de una familia de funciones uniformemente acotada en dicho dominio. Gracias al Teorema de Montel, tenemos que, además, se trata de una familia normal, es decir, toda sucesión de funciones de la familia posee una subsucesión que converge uniformemente en cada compacto de $\mathbb{C} \setminus K$. En otras palabras, las funciones de este conjunto tienden a agruparse en lugar de estar ampliamente distribuidas. Por tanto, podemos considerar una sucesión $\{f_k\}_k$ de funciones admisibles para K de forma que $f_k'(\infty)$ tienda a $\gamma(K)$ cuando hagamos tender k a $+\infty$ y, por otra parte, tomamos una subsucesión convergente cuyo límite sea la función f, de forma que se verifique que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus K$ y, además,

$$\begin{aligned} f'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \lim_{k \to \infty} f_k(z)dz = \\ = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f_k(z) = \lim_{k \to \infty} f_k'(\infty) = \gamma(K) \end{aligned}$$

con $\rho > 0$ suficientemente grande. Cabe señalar que a la subsucesión que hemos escogido la hemos vuelto a denotar como $\{f_k\}_k$, por lo que se trata de un abuso de notación pero con el único objetivo de clarificar las propiedades que se tienen.

En segundo lugar comprobaremos que si f es admisible para K, $\gamma(K) > 0$ y $f'(\infty) = \gamma(K)$ entonces $f(\infty) = 0$.

Razonaremos por reducción al absurdo, por lo que suponemos que $f(\infty) \neq 0$.

En primer lugar, veamos que $|f(\infty)| < 1$. Para ello, tomamos $\varepsilon > 0$ y definimos la función $h(z)$ como sigue:

$$h(z) = \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & \text{si } z \in B(0,\varepsilon) \setminus \{0\} \\ \\ f(\infty) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Como la función f está acotada en módulo por 1 al ser admisible para K, tenemos que $|h(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,\varepsilon)$. Si se tuviera que $|f(\infty)| = 1$, la función h alcanzaría su máximo en $z = 0$, es decir, en un punto del abierto $B(0,\varepsilon)$. Aplicando el Principio del Módulo Máximo, h se trataría de la función constante, lo que supone una contradicción puesto que f no es constante. Por tanto, tenemos que $|f(\infty)| < 1$.

Consideramos ahora la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\infty)}{1 - \overline{f(\infty)}f(z)}.$$

que verifica $g(\infty) = 0$ y, además, $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Esta última propiedad se puede ver de dos formas. Por una parte, si para $a \in \mathbb{D}$ definimos la función

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z},$$

para el caso particular en el que $a = f(\infty)$, se tiene que

$$(\varphi_a \circ f)(z) = \varphi_a(f(z)) = g(z)$$

es un automorfismo del disco unidad.

Por otro lado, es posible demostrarlo razonando por reducción al absurdo. En efecto, si por el contrario se diera $|g(z)| > 1$, se tendría que

$$|f(z) - f(\infty)|^2 > |1 - \overline{f(\infty)}f(z)|^2.$$

De forma consecuente,

$$|f(z)|^2 + |f(\infty)|^2 > 1 + |f(z)|^2|f(\infty)|^2$$

y, por tanto,

$$0 > (1 - |f(z)|^2)(1 - |f(\infty)|^2)$$

que se trata de una contradicción puesto que, o bien $f(z)$, o $f(\infty)$, deberían ser mayor que la unidad en módulo, contrario al hecho de que f es una función que alcanza valores en el disco unidad.

Seguidamente y atendiendo a la definición que se dió de derivada en el ∞,

$$g'(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(f(z) - f(\infty))}{1 - \overline{f(\infty)}f(z)} = \frac{f'(\infty)}{1 - |f(\infty)|^2},$$

Como $|1 - |f(\infty)|^2| = 1 - |f(\infty)|^2 < 1$, al ser $|f(\infty)| > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{1 - |f(\infty)|^2} > 1$$

y, con ello,

$$|g'(\infty)| > |f'(\infty)|$$

mientras que $\gamma(K) = |f'(\infty)| \neq 0$. Con este razonamiento hemos encontrado una función g admisible para K, cuya derivada en valor absoluto toma en el infinito un valor superior al supremo $\gamma(K)$, lo que supone una contradicción. Luego, necesariamente, $f(\infty) = 0$. $\square$

Tras este resultado, podemos dar una definición equivalente a la que se dió en 1.8. Se trata de la siguiente:

$$\gamma(K) = \sup\{|f'(\infty)| : f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K) \text{ con } \|f\|_\infty \leq 1 \text{ y } f(\infty) = 0\}.$$

Proposición 1.4.9. *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto conexo distinto de cualquier conjunto formado por un solo punto. Consideramos la aplicación conforme f que va de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ en el disco unidad, y que satisface $f(\infty) = 0$. Entonces, $\gamma(K) = |f'(\infty)|$.*

Demostración. En primer lugar, tenemos que justificar la existencia de la función que se cita en el enunciado. Para ello, desarrollaremos una construcción dará lugar a dicha función a través del Teorema de Representación Conforme de Riemann.

Sea G_0 la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, de forma que $\mathbb{C} \setminus G_0 = \hat{K}$. Dicho de otro modo, el compacto $\hat{K}$ se trata de la unión de nuestro compacto K con las componentes conexas acotadas de su complemetario. Pues bien, es posible probar que al ser K conexo, $\hat{K}$ también lo es.

Seguidamente, fijamos un punto $a \in \hat{K}$ de forma que definimos el siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longrightarrow \frac{1}{z-a}. \end{aligned}$$

Cabe señalar que esta aplicación verifica que $T_a(\infty) = 0$ y $T_a(a) = \infty$. Además, si calculamos la imagen de $\{\infty\} \cup G_0$ a través de T_a tenemos que $T_a(\{\infty\} \cup G_0) = H_0$ para un cierto H_0 subconjunto de $\mathbb{C}$. Como $T_a(\infty) = 0$, se tiene que $0 \in H_0$. Ahora bien, considerando el complementario de este conjunto que acabamos de obtener observamos que

$$\mathbb{C}_\infty \setminus H_0 = T_a(\mathbb{C}_\infty \setminus (\{\infty\} \cup G_0)) = T_a(\hat{K}).$$

Como $\hat{K}$ es conexo, al tratarse T_a de un isomorfismo, se tiene que $T_a(\hat{K})$ es conexo y, por la observación que se hizo al comiendo de la demostración, tenemos que H_0 es conexo.

Llegados a este punto, tenemos las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema de Representación Conforme de Riemman. Gracias a este resultado se tiene que existe una aplicación biyectiva y holomorfa de la región H_0 en el disco unidad, es decir,

$$g : H_0 \longrightarrow \mathbb{D}$$

de forma que $g(0) = 0$. Además, esta función se trata, de nuevo, de un isomorfismo.

Consideramos ahora la composición de las dos funciones que hemos obtenido: T_a y g.

$$f : \mathbb{C} \setminus \hat{K} \xrightarrow{T_a} H_0 \setminus \{0\} \xrightarrow{g} \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

Esta función verifica que

$$f(\infty) = g(T_a(\infty)) = g(0) = 0,$$

y, además, $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus G_0$. Como $\mathbb{C} \setminus \hat{K} = G_0$, hemos encontrado una aplicación conforme que va de la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ en el disco unidad, tal y como se exige en el enunciado.

Ahora bien, probando el doble sentido de la desigualdad obtendremos la igualdad enunciada arriba.

En primer lugar, por las características que reúne la función f, nos encontramos ante una aplicación admisible para el compacto K, por lo que al ser la capacidad analítica un supremo, se tiene que $\gamma(K) \geq |f'(\infty)|$.

Por otra parte, consideramos otra función h admisible para el compacto y verificando $h(\infty) = 0$. Por tanto, la función

$$h \circ f^{-1} : B(0,1) \to B(0,1)$$

es analítica por composición y deja fijo al origen. Entonces, por el Lema de Schwarz, $|h \circ f^{-1}(z)| \leq |z|$ para todo z en el disco unidad. En particular, como $f(z) \in B(0,1)$, se tiene que $|h \circ f^{-1}(f(z))| = |h(z)| \leq |f(z)|,$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Por la definición de derivada en el ∞ se satisface también que $|h'(\infty)| \leq |f'(\infty)|$. Como esta desigualdad se tiene para toda función h verificando las condiciones anteriores, en particular el supremo de las funciones admisibles para K también la verifica, luego $\gamma(K) \leq |f'(\infty)|$.

$\square$

A continuación vamos a trabajar de nuevo con ejemplos que ya se han visto pero, gracias a los resultados y técnicas que han sido probados hasta ahora, nos será más fácil establecer de forma exacta el valor de la capacidad analítica.

Ejemplo 1.4.10. La capacidad analítica de un disco es su radio.

Consideramos el disco $\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{B}(z_0, r) &\longrightarrow B(0,1) \\ z &\longrightarrow \frac{r}{z - z_0} \end{aligned}$$

que se trata de una función conforme y verifica $f(\infty) = 0$. Por la proposición anterior, $\gamma(B(z_0, r)) = |f'(\infty)|$. Luego,

$$f'(\infty) = \lim_{z \to \infty} z \left(\frac{r}{z - z_0} - 0 \right) = r > 0$$

Por lo que podemos concluir que $\gamma(B(z_0, r)) = r$.

Ejemplo 1.4.11. La capacidad analítica de un segmento de longitud l es $l/4$.

Para este caso consideramos la función

$$\begin{aligned} f : B(0,1) &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus [-l/2, l/2] \\ z &\longrightarrow \left(z + \frac{1}{z} \right) \frac{l}{4} \end{aligned}$$

que se trata de una aplicación conforme que satisface $f(0) = \infty$. Veamos que, en efecto, la función que hemos definido lleva puntos de la bola unidad a puntos del plano salvo el segmento que se ha indicado.

Lo que queremos saber realmente es cómo son los puntos $f(z) = (z + \frac{1}{z})\frac{l}{4}$. Para ello, consideramos un punto cualquiera del plano complejo w de forma que

$$\left(z + \frac{1}{z} \right) \frac{l}{4} = w.$$

Para conocer la forma de esos puntos, resolvemos la ecuación de segundo grado en la variable z

$$\frac{l}{4}z^2 - wz + \frac{l}{4} = 0,$$

de forma que se obtienen las soluciones

$$z_\pm = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - \frac{l^2}{4}}}{\frac{l}{2}} = \frac{2w \pm \sqrt{4w^2 - l^2}}{l}.$$

No es difícil comprobar que dichas soluciones verifican la siguiente propiedad:

$$z_+ = \frac{1}{z_-},$$

es decir, una solución es la inversa de la otra. Por tanto, existen dos posibilidades: que el módulo de ambas sea igual a 1 o, que el módulo de una sea menor que 1 siendo el de la otra mayor que la unidad.

Estudiamos el primer caso. Supongamos que $|z_+| = |z_-| = 1$. De ser así, se tendría que $z_\pm = e^{\pm i\theta}$. Calculando su valor a través de la función f tenemos que

$$f(\pm z) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})\frac{l}{4} = 2\cos(\theta)\frac{l}{4} \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}],$$

encontrándonos, en este caso, con puntos que van a través de f al segmento $[-l/2, l/2]$. Por tanto, el caso que nos interesa a nosotros es el otro: puntos z con módulo menor que 1 (parten del la bola unidad) y que se dirigen a todo el plano complejo salvo el segmento anteriormente mencionado.

Una vez que hemos comprobado que la función está bien definida, consideramos ahora la inversa $g = f^{-1}$, una aplicación conforme que lleva puntos de $\mathbb{C}_\infty \setminus [-l/2, l/2]$ en el disco unidad y que, evidentemente, verifica la condición $g(\infty) = 0$. Se tiene por tanto,

$$\gamma([-l/2, l/2]) = \lim_{z\to\infty} |zg(z)| = \lim_{w\to 0} |f(w)w| = \frac{l}{4}.$$

Teorema 1.4.12 (Teorema del cuarto de Koebe)**.** *Sea una función analítica e inyectiva definida como sigue*

$$f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Entonces, su imagen contiene el disco de centro $f(0)$ y radio $|f'(0)|/4$. En particular, si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, se tiene $B(0, 1/4) \subset f(B(0,1))$.

Una prueba de este resultado se puede encontrar en [Rud, 14.14].

A continuación veremos una destacable aplicación de este teorema para la capacidad analítica.

Proposición 1.4.13. *Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto y conexo. Se tiene*

$$diam(K)/4 \leq \gamma(K) \leq diam(K).$$

Demostración. Para la segunda desigualdad basta darse cuenta que K está contenido en un disco cerrado D de radio $\operatorname{diam}(K)$. Por tanto, por la monotonía de la capacidad analítica y sabiendo que la capacidad analítica de un disco es su radio, se tiene:

$$\gamma(K) \leq \gamma(D) = \operatorname{diam}(K).$$

Con respecto a la primera desigualdad, consideramos la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, $U \subset \mathbb{C}$ y la función $f : U \longrightarrow B(0,1)$ verificando $f(\infty) = 0$. Tomamos $z_1, z_2 \in K$ de forma que $|z_1 - z_2| = \operatorname{diam}(K)$ y definimos la función

$$g(z) = \frac{\gamma(K)}{f^{-1}(z) - z_1}.$$

Debido a que f^{-1} es una aplicación inyectiva, también lo es g. Además,

$$g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\gamma(K)}{f^{-1}(z) - z_1} = \lim_{w\to\infty} \frac{\gamma(K)}{w - z_1} = 0$$

y, razonando como en el Ejemplo 1.4.11 se tiene que

$$\lim_{z\to 0} |zf^{-1}(z)| = \lim_{w\to\infty} |f(w)w| = \gamma(K).$$

Por tanto,

$$|g'(0)| = \lim_{z\to 0} \left| \frac{\gamma(K)}{z(f^{-1}(z) - z_1)} \right| = 1.$$

Tenemos que $z_2 \in K$ no pertenece al conjunto imagen de f^{-1} (contenido en U) y, consecuentemente, $\gamma(K)/(z_2 - z_1)$ tampoco pertenece a la imagen de g. Como esta función cumple las hipótesis del Teorema del cuarto de Koebe, se tiene que $B(0, 1/4) \subset g(B(0, 1))$. Si $\gamma(K)/|z_2 - z_1| \in B(0, 1/4)$, pertenecería a la imagen de g, lo que supone una contradicción con lo que acabamos de ver. Finalmente, se tiene

$$\frac{\gamma(K)}{|z_2 - z_1|} \geq \frac{1}{4}$$

lo que implica directamente que

$$\gamma(K) \geq \frac{|z_2 - z_1|}{4} = \frac{\operatorname{diam}(K)}{4}.$$

Con ambas desigualdades queda demostrada la proposición. $\square$

Haciendo uso de esta proposición, si para un compacto conexo K tenemos que su capacidad analítica es 0, se tiene gracias a las desigualdades arriba demostradas que $\operatorname{diam}(K) = 0$. Esto quiere decir que cada componente conexa de K está formada a lo más por un punto o, equivalentemente, que K es totalmente disconexo.

Proposición 1.4.14 (Regularidad exterior de γ). *Sea $\{K_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de conjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Entonces*

$$\gamma(\lim_{n\to\infty} K_n) = \gamma(\bigcap_{n\geq 1} K_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(K_n)$$

Demostración. Denotamos por K a la intersección de todos los elementos de la sucesión, es decir, $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$. Por monotonía de la capacidad analítica, se tiene que $\{\gamma(K_n)\}_{n\geq 10}$ es una sucesión no creciente de términos no negativos, por lo que se puede afirmar que existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(K_n)$.

Como para todo $n \geq 1$ se tiene $K \subset K_n$, por la misma propiedad de la capacidad analítica nombrada anteriormente, $\gamma(K) \leq \gamma(K_n)$ para todo $n \geq 1$. En particular, haciendo n tender a ∞,

$$\gamma(K) \leq \lim_{n\to\infty} \gamma(K_n).$$

Para la desigualdad contraria vamos a llevar a cabo un proceso reiterado que describiremos a continuación.

Tomamos para cada $n \geq 1$, f_n admisible para K_n con $f_n'(\infty) = \gamma(K_n)$; es decir, $f_n \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus K_n)$ y $\|f_n\|_\infty \leq 1$ para todo $n \geq 1$. En definitiva, f_n sería una función de Ahlfors para K_n.

Se tiene para cada $m \geq 1$ que la familia

$$\{f_n\lfloor_{\mathbb{C}\setminus K_m} : n \geq m\}$$

es normal en $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K_m)$. En particular, para $m = 1$, existe una subsucesión $\{f_{n,k}\}_{k\geq 1}$ que converge uniformemente a una cierta función $g_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K_1)$ en compactos de $\mathbb{C} \setminus K_1$. Además, $\|g_1\|_\infty \leq 1$, por lo que la función g_1 es admisible para K_1. Veamos a continuación que g_1 se extiende a una función g_2 admisible para K_2.

Ese hecho se deduce que de la familia

$$\{f_{n_k}\lfloor_{\mathbb{C}\setminus K_2} : n_k \geq 2\}$$

se trata de una familia normal y, por tanto, posee una subsucesión convergente a cierto $g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K_2)$. Obviamente $g_2(z) = g_1(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus K_1$ y, además, $\|g_2\|_\infty \leq 1$.

Reiterando este razonamiento de forma que en cada etapa tomemos una subsucesión, se prueba que para todo $m \geq 1$ existe una sucesión $\{g_m\}_{m\geq 1}$ de forma que g_m es admisible para K_m, cumpliendo también que

$$g_{m+1}\lfloor_{\mathbb{C}\setminus K_m} = g_m. \tag{1.9}$$

Con todo ello, podemos definir $g : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C}$ con $g(z) = g_m(z)$ si $z \in \mathbb{C} \setminus K_m$. Como se cumple que

$$\mathbb{C} \setminus K = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{C} \setminus K_m,$$

se tiene que g es admisible para K. Tomando $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus K_1$ de forma que $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 1$ para todo $w \in K_1$, se tiene que

$$g'(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z)dz = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_{n_k}(z)dz =$$
$$= \lim_{k\to\infty} f'_{n_k}(\infty) = \lim_{k\to\infty}\gamma(K_{n_k}) = \lim_{n\to\infty}\gamma(K_n)$$

Por tanto, considerando el supremo de la definición de $\gamma(K)$,

$$\gamma(K) \geq |g'(\infty)| = \lim_{n\to\infty}\gamma(K_n).$$

Considerando ambas desigualdades queda demostrada la proposición. □

Corolario 1.4.15. *Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces*

$$\gamma(K) = \inf\{\gamma(U) : U \textit{ abierto, } K \subset U\}.$$

Demostración. Desarrollaremos la prueba del corolario demostrando la desigualdad en los dos sentidos.

En primer lugar, si $K \subset U$ para K compacto y U abierto, se tiene que $\gamma(K) \leq \gamma(U)$ por las propiedades de la capacidad analítica. Tomando ínfimo entre todos los abiertos que contienen a K a ambos lados de la desigualdad, se tiene que

$$\gamma(K) \leq \inf\{\gamma(U) : U \text{ abierto, } K \subset U\}.$$

Por otro lado, consideramos la sucesión de abiertos $\{U_n\}_{n\geq 1}$ y de compactos $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de forma que

$$U_n = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) < \frac{1}{n}\}$$
$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Por tanto, $K \subset U_n \subset K_n$ para todo $n \geq 1$ y $\bigcap_{n\geq 1} K_n = K$. Gracias a la monotonía de la capacidad analítica tenemos que $\gamma(U_n) \leq \gamma(K_n)$ para todo $n \geq 1$. Por último, como la sucesión de compactos es decreciente, hacemos n tender a ∞ y, utilizando la Proposición 1.4.14 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(U_n) \leq \lim_{n\to\infty} \gamma(K_n) = \gamma(\bigcap_{n\geq 1} K_n) = \gamma(K).$$

Como $\lim_{n\to\infty} \gamma(U_n) \geq \inf\{\gamma(U) : U \text{ abierto}, K \subset U\}$, se obtiene la desigualdad deseada y, con ella, la prueba del corolario.

□

Proposición 1.4.16. *Para todo compacto K, existe una función admisible f para K de forma que $f'(\infty) = \gamma(K)$. Si, además, $\gamma(K) > 0$, dicha función es única en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$.*

Demostración. Ya vimos en la Proposición 1.4.8 que el supremo de la definición de capacidad analítica se alcanza, luego queda probada la existencia de dicha función.

En segundo lugar, razonaremos por reducción al absurdo para probar la unicidad de f. Supongamos que existen dos funciones admisibles para K, f_1 y f_2, de forma que $f_1'(\infty) = f_2'(\infty) = \gamma(K) > 0$ y $f_1(\infty) = f_2(\infty) = 0$ por la Proposición 1.4.8. Consideramos ahora la función $f = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ analítica en $\mathbb{C} \setminus K$ por su propia definición y verificando $|f| \leq \dfrac{|f_1| + |f_2|}{2} \leq 1$, es decir, f es también admisible para K. Además, $f'(\infty) = \gamma(K)$ y $f(\infty) = 0$. Sea ahora $g = \dfrac{f_2 - f_1}{2}$ de forma que $f_1 = f - g$ y $f_2 = f + g$. Como $f + g = f_2$ y $f - g = f_1$, se tiene que

$$|f \pm g|^2 = |f|^2 + |g|^2 \pm 2\mathrm{Re}(f\overline{g}) \leq 1$$

de donde se puede deducir que $|f|^2 + |g|^2 \leq 1$. Usando también que $1 + |f| \leq 2$, se tiene que

$$\frac{|g|^2}{2} \leq \frac{1 - |f|^2}{2} = \frac{(1 - |f|)(1 + |f|)}{2} \leq 1 - |f|.$$

Por tanto,

$$|f| + \frac{|g|^2}{2} \leq 1.$$

Si en un entorno del ∞ se tiene que $f_1 \neq f_2$, entonces $g \neq 0$ en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y, por tanto, podemos considerar el desarrollo en series de Laurent de $g(z)$ en dicho entorno.

Tal y como se ha indicado en ocasiones anteriores, se tendrá que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

siendo la expresión de los coeficientes

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz \qquad \text{para todo } n \geq 0,$$

con Γ cualquier curva rectificable rodeando al compacto.

Además, como $g(\infty) = 0$, podemos afirmar que $a_0 = 0$. Luego,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Pero lo que verdaderamente nos interesaba era la función $\frac{g(z)^2}{2}$. Al elevar al cuadrado la serie anterior, se tiene que la de $g^2/2$ será de la forma

$$\frac{g(z)^2}{2} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Es decir, se tendrá que $b_0 = b_1 = 0$ y existirá un número $k \geq 2$ de forma que $b_k \neq 0$ y $b_j = 0$ para todo $j \leq k$.

Ahora bien, para $\varepsilon > 0$ verificando $|\varepsilon \overline{a_k} z^{k-1}| \leq 1$ en algún entorno acotado de K, consideramos la función

$$\widetilde{f}(z) = f(z) + \varepsilon \overline{a_k} z^{k-1} \frac{g(z)^2}{2}.$$

Con la condición que ha de verificar ε se tiene que

$$|\widetilde{f}(z)| \leq |f(z)| + \left| \varepsilon \overline{a_k} z^{k-1} \frac{g(z)^2}{2} \right| \leq |f(z)| + \frac{|g(z)^2|}{2} \leq 1$$

en dicho entorno y, por tanto, en toda la componente no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ por el Principio del Módulo Máximo. Además, es fácil comprobar que $\widetilde{f}(\infty) = 0$, ya que f y g verifican esta misma propiedad. En conclusión, $\widetilde{f}$ es otra función admisible para K.

Sin embargo, como $\widetilde{f}'(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} z\widetilde{f}(z)$,

$$\widetilde{f}'(\infty) = f'(\infty) + \varepsilon|a_n|^2 > \gamma(K)$$

lo que supone una contradicción.

De esta forma, queda probada la unicidad de la función f del enunciado. $\square$

Observación 1.4.17. Otra forma de ver el resultado anterior es que, para no llegar a la contradicción $\widetilde{f}'(\infty) > \gamma(K)$, se tendría que dar como mucho la igualdad, para la cual la función g tendría que ser nula y, por tanto, $f_1 = f_2$.

Observación 1.4.18. A la función descrita en la proposición anterior se le llama función de Ahlfors de K.

Para finalizar la sección vamos a establecer la relación entre los ejemplos que se han visto para capacidad analítica y conjuntos evitables basándonos en la equivalencia que se ha probado entre ambos conceptos. Los ejemplos de los que hablamos son, entre otros, el punto, el segmento o una bola de centro $z_0 \in \mathbb{C}$ y radio r arbitrarios.

En el primero de los casos, justificábamos que un punto es un conjunto evitable. Más adelante probábamos que su capacidad analítica era nula.

Por otra parte, para el segmento vimos que su capacidad analítica era un cuarto de su longitud, por lo que al ser una cantidad positiva se tiene que es un conjunto no evitable.

Por último, para las bolas descritas arriba se dedujo que eran también compactos no evitables. Finalmente, probamos que su capacidad analítica era su radio o, lo que es más importante, que es una cantidad estrictamente positiva.

Capítulo 2

Medidas de Hausdorff.

2.1. Introducción.

El hecho de profundizar en el estudio sobre ciertas propiedades geométricas requiere una serie de conceptos que van más allá de lo que se puede expresar en términos de la medida de Lebesgue. Algunos de esos conceptos son, por ejemplo, la dimensión de un conjunto, que puede tratarse de una fracción, así como la medida que va asociada a dicho valor.

Vamos a intentar dar una idea intuitiva del concepto de dimensión de un conjunto. Para ello nos basamos en cómo se puede replicar un conjunto bajo ciertas escalas o proporciones. Consideramos el conjunto E de forma que, para algún número positivo n, se tiene que nE es unión disjunta de m copias de E a una escala menor. Es decir,

$$nE = E_1 \cup \cdots \cup E_m.$$

Si, por ejemplo, E se tratara de un segmento, bastaría tomar una partición suya en n componentes iguales y disjuntas (salvo la frontera) de forma que $n = m$. Si, en otro caso, E fuera un cuadrado, consideramos una partición como la descrita anteriormente pero en cada uno de los lados. De esta forma, E sería unión disjunta de $m = n^2$ cuadrados, todos réplicas del primero pero a una escala menor. Si E se tratara de un cubo, tendríamos si seguimos el mismo razonamiento que $m = n^3$. En general, esto conduce a la idea de establecer que E tiene dimensión α si $m = n^\alpha$.

A lo largo del tema estudiaremos con más detalles otros ejemplos como el Conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ en el intervalo $[0, 1]$. Si tenemos que $3\mathcal{C}$ consiste en dos copias de dicho conjunto, una en $[0, 1]$ y otra en $[2, 3]$ podremos concluir que, como $n = 3$ y $m = 2$ la dimensión del Conjunto de Cantor será $\log 2/\log 3$.

Otra aproximación relevante sobre la dimensión es para curvas que no son necesariamente rectificables. Consideramos la curva $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ y, para cada

$\varepsilon > 0$ consideramos líneas poligonales uniendo $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, de forma que los vértices coinciden con puntos de Γ y cada segmento posee longitud menor que ε. Sea n_ε el menor número de segmentos que aparecen cuando construimos dichas poligonales. Si n_ε se aproxima a ε^{-1} cuando ε tiende a 0, diremos que Γ es rectificable. Para entenderlo mejor, si ε es una cantidad cercana a 0, su inversa crece rápidamente y, si n_ε se aproxima a este número significa que la cantidad de segmentos que forman la poligonal es considerablemente grande. Cuanto mayor sea el número de estos segmentos, mayor es la semejanza entre la curva Γ y la poligonal. También puede ocurrir que, cuando ε es lo suficientemente pequeño, n_ε crezca más rápido que ε^{-1}. En ese caso podemos tener $1 < \alpha$ de forma que n_ε se aproxime a $\varepsilon^{-\alpha}$. En ese caso será natural decir que la curva Γ tiene dimensión α.

A estos conceptos van ligadas numerosas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia. Por ejemplo, a la hora de cuantificar la longitud de la frontera o de la costa de un país, L.F. Richardson estableció que la longitud de la costa oeste de Gran Bretaña seguía la proporción $n_\varepsilon \approx \varepsilon^{-\alpha}$, con α aproximadamente 1.5. Por tanto, podríamos decir que la costa tendría una dimensión fraccionaria.

2.2. Resultados previos.

Definición 2.2.1. *Sea M un conjunto. Una medida exterior es una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(M) \to [0, +\infty]$ de forma que:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. *Si $A \subset B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
3. *Para toda sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}$ del conjunto de las partes de M se tiene que*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Las dos últimas propiedades se denominan monotonía y subaditividad, respectivamente.

Definición 2.2.2. *Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera. Dos subconjuntos E y F de M se dicen distantes si $d(E, F) > 0$, donde*

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\}.$$

Definición 2.2.3. *Sea (M, d) un espacio métrico. Se dice que una medida exterior μ^* en M es medida exterior métrica si para cada par de conjuntos distantes $E, F \subset M$ se tiene que*

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Definición 2.2.4. *Sea μ^* una medida exterior definida en un conjunto M. Decimos que $E \subset M$ es medible en el sentido de Carathéodory si para todo $A \subset M$ se tiene que*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

Teorema 2.2.5 (Teorema de Carathéodory.)**.** *Sea μ^* una medida exterior definida en un conjunto M. Entonces, la colección $\mathcal{M}$ de conjuntos medibles en el sentido de Carathéodory forman una σ-álgebra. Más aún, la restricción de μ^* a $\mathcal{M}$, a la que llamaremos μ, es una medida.*

Teorema 2.2.6. *Sea M un espacio métrico y μ^* una medida exterior métrica definida en M. Entonces, los conjuntos abiertos de M son medibles en el sentido de Carathéodory.*

Corolario 2.2.7. *Sea M un espacio métrico y μ^* una medida exterior métrica definida en M. Entonces, todos los conjuntos de Borel son medibles en el sentido de Carathéodory.*

La demostración de estos tres últimos resultados es posible encontrarla en el sexto capítulo de [SS2].

2.3. Medida de Hausdorff.

Comenzaremos dando un nuevo concepto de tamaño o volumen estrictamente relacionado con la idea de dimensión de la que se ha venido hablando hasta ahora. Hay que tener en cuenta que hasta ahora esa idea es unicamente intuitiva. En concreto, si consideramos un conjunto E y un valor $\alpha > 0$ cualesquiera, podemos hablar de la cantidad $\mathcal{H}^\alpha(E)$, que puede interpretarse como la masa α-dimensional de E entre conjuntos de dimensión α. Por tanto, si el conjunto tiene dimensión menor que α, entonces E tiene una masa insignificante, por lo que podemos decir que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$. Si, por el contrario, la dimensión de E es mayor que α, nuestro conjunto es mucho más grande comparado con los conjuntos de dimensión α, por lo que diremos que $\mathcal{H}^\alpha(E) = \infty$. En el caso en el que la dimensión de E sea exactamente α, el número $\mathcal{H}^\alpha(E)$ cuantifica el valor del tamaño α-dimensional de E.

Para entender mejor estas ideas nos detenemos en un par de ejemplos en los que se profundizará a lo largo del capítulo.

Si consideramos el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ en el intervalo $[0, 1]$, se puede probar que su dimensión de Hausdorff es $\log 2/\log 3$, así como que la medida dimensional de Hausdorff correspondiente es finita y positiva.

Ahora bien, es evidente que $\log 2/\log 3$ es menor que 1. Se verá, más adelante, que la medida 1-dimensional de Hausdorff corresponde con la longitud del conjunto o, equivalentemente, con su medida de Lebesgue. En el caso del conjunto de Cantor, es posible comprobar que la longitud es 0. Por tanto, se satisface la relación entre las dimensiones de la que se habló anteriormente.

Otro caso más sencillo de ver incluso es el de una curva Γ rectificable en el plano. Como se trata de un elemento de dimensión 1 en un espacio de dimensión 2, es evidente que la medida de Lebesgue 2-dimensional es cero, es decir, su área es nula. Ahora bien, la medida $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ es finita y, además, exactamente igual a la longitud de Γ, tal y como se define este concepto en la medida de Lebesgue.

Vamos a presentar ahora la definición de medida de Hausdorff. En primer lugar, nos centraremos en el caso particular del espacio métrico $\mathbb{R}^d$ para, más adelante, trabajar con el mismo concepto pero en un espacio métrico cualquiera.

Para ello, consideramos el concepto de diámetro de un conjunto como

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{|x-y| : x, y \in E\},$$

que en algunas ocasiones puede que denotemos como $|E|$. Para cada $\delta > 0$ vamos a considerar recubrimientos de E por familias numerables de conjuntos arbitrarios con diámetro menor o igual que δ. A una familia de conjuntos cumpliendo esta propiedad en su diámetro la llamaremos de aquí en adelante δ-recubrimiento del conjunto. Para terminar, consideramos el ínfimo de las sumas $\sum_i (\operatorname{diam} U_i)^\alpha$. Con todo esto damos paso a la primera definición.

Definición 2.3.1. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, se define $\mathcal{H}^\alpha_\delta(E)$ como*

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^\alpha : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \text{ con } \operatorname{diam} U_i \leq \delta \text{ para todo } i \geq 1\right\}.$$

Cabe destacar que cuando δ disminuye y tiende a 0, la cantidad de recubrimientos que verifican que el diámetro de sus conjuntos es menor que δ disminuye, por lo que el ínfimo del conjunto de la definición anterior aumenta. Esto justifica que, aunque pueda ser infinito, el límite cuando δ tiende a 0 de la cantidad anterior existe, dando paso a la siguiente definición:

Definición 2.3.2. *Sea E subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Se define la medida α-dimensional de Hausdorff de E como*

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(E). \tag{2.1}$$

En particular se tiene que para todo $\delta > 0$, $\mathcal{H}^\alpha_\delta(E) \leq \mathcal{H}^\alpha(E)$. El requisito de que los elementos del recubrimiento tengan un diámetro relativamente pequeño es lo que justificará el hecho de que nuestra medida sea una medida exterior métrica, además de garantizar algunas de las propiedades que se verán más adelante como lo es la monotonía de la medida.

Es importante considerar la siguiente definición, que no es más que un caso particular de la Definición 2.3.1.

Definición 2.3.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Se define $\mathcal{H}^\alpha_\infty$ como*

$$\mathcal{H}^\alpha_\infty(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_i)^\alpha : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right\}. \tag{2.2}$$

Es decir, consiste en la suma de diámetros de recubrimientos del conjunto E pero, en esta ocasión, no exigimos ninguna cota superior para los diámetros de dichos recubrimientos.

La escala de la que se habló al principio del tema subyace en la definición de medida de Hausdorff. Este hecho se traduce en que si consideramos un conjunto E al que se le aplica una escala r de forma que se consigue rE, entonces a $(\operatorname{diam} E)^\alpha$ se le aplica una escala de r^α. Por ejemplo, dada una curva regular de dimensión 1 en $\mathbb{R}^d$, γ, cuya longitud es l, entonces $r\gamma$ tiene longitud rL. O también, un cubo de volumen V_Q en $\mathbb{R}^d$, da lugar a que rQ tenga volumen $r^d V_Q$.

Estudiemos formalmente algunas de las propiedades más interesantes que satisface la medida de Hausdorff

Proposición 2.3.4. *La medida de Hausdorff es invariante ante traslaciones y rotaciones. Es decir sea r una rotación en $\mathbb{R}^d$, se satisface que*

$$\mathcal{H}^\alpha(rE) = \mathcal{H}^\alpha(E).$$

Por otra parte, se tiene que

$$\mathcal{H}^\alpha(E+h) = \mathcal{H}^\alpha(E), \quad \textit{para todo } h \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración. La prueba se basa en el hecho de que el diámetro de un conjunto cualquiera es invariante ante traslaciones y rotaciones, propiedad que vamos a probar a continuación.

Consideremos el giro g de razón r en $\mathbb{R}^d$ definido como sigue:

$$\begin{aligned} g_r : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto rx = x' \end{aligned}$$

de forma que $g_r(E) = F$ para cierto conjunto $F \subset \mathbb{R}^d$. En concreto, F es el conjunto E girado.

Gracias a tal y como se define la aplicación se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(F) = \sup\{|x'-y'| \text{ tal que } x', y' \in F\} = \sup\{|rx - ry| \text{ tal que } rx, ry \in F\} = \\ = \sup\{|x-y| \text{ tal que } x, y \in E\} = \operatorname{diam}(E). \end{aligned}$$

En concreto, la idea subyace en que al aplicar el mismo giro a dos puntos cualesquiera, la distancia entre ellos se mantiene constante. Por tanto, hemos probado que $\operatorname{diam}(E) = \operatorname{diam}(rE)$.

Consideremos ahora un δ-recubrimiento $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ del conjunto E de forma que, al aplicarle la rotación g_r, mantienen el diámetro por lo demostrado anteriormente, por lo que pasa a ser un δ-recubrimiento de rE, que vamos a denotar por $\{rU_i\}_{i=1}^{\infty}$. Por tanto, como estamos sumando los mismos diámetros se tiene que

$$\mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(E) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_i)^{\alpha} : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \text{ con } \operatorname{diam} U_i \leq \delta \text{ para todo } i \geq 1\right\} =$$
$$= \operatorname{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_i)^{\alpha} : rE \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} rU_i, \text{ con } \operatorname{diam} rU_i \leq \delta \text{ para todo } i \geq 1\right\} = \mathcal{H}^{\alpha}_{\delta}(rE).$$

Tomando límite cuando δ tiende a 0, conseguimos que

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) = \mathcal{H}^{\alpha}(rE).$$

Para demostrar ahora la misma propiedad para las traslaciones comenzamos probando que el diámetro de un conjunto trasladado coincide con el diámetro del conjunto inicial. Para ello, dado $h \in \mathbb{R}^d$, definimos la aplicación T_h como sigue:

$$\begin{aligned} T_h : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto x + h \end{aligned}$$

de forma que $T_h(E) = E + h = F$, con F subconjunto de $\mathbb{R}^d$. De esta forma, se sigue de la definición de dicha aplicación que

$$\operatorname{diam}(F) = \sup\{|x' - y'| \text{ tal que } x', y' \in F\} = \sup\{|x + h - y - h| \text{ tal que } x, y \in E\} =$$
$$= \sup\{|x - y| \text{ tal que } x, y \in E\}.$$

quedando probado que el diámetro de un conjunto permanece constante ante traslaciones.

Llegados a este punto, se razona de forma análoga a como se hizo para rotaciones para, finalmente, concluir que

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E + h) = \mathcal{H}^{\alpha}(E).$$

□

La siguiente propiedad establece la proporción que sigue la medida de Hausdorff de un conjunto al aplicarle una homotecia. En muchas ocasiones, también se habla de la escala del conjunto. Para probarla seguiremos el mismo procedimiento que en ocasiones anteriores.

Proposición 2.3.5. *Se tiene que*

$$\mathcal{H}^\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E) \quad \textit{para todo } \lambda > 0.$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$ definimos la aplicación H_λ como sigue:

$$\begin{aligned} H_\lambda : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto \lambda x = x' \end{aligned}$$

de forma que $H_\lambda(E) = \lambda E = F$, siendo F subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Procedemos a calcular el diámetro de este conjunto que hemos obtenido a través de la aplicación.

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(F) = \sup\{|x' - y'| \text{ tal que } x', y' \in F\} = \sup\{|\lambda x - \lambda y| \text{ tal que } x, y \in E\} = \\ = |\lambda| \sup\{|x - y| \text{ tal que } x, y \in E\} = |\lambda| \operatorname{diam}(E). \end{aligned}$$

Por tanto, el diámetro del conjunto F sigue una proporción de razón $|\lambda|$ con el diámetro del conjunto de partida.

Consideramos ahora un recubrimiento de E constituido por conjuntos cuyo diámetro es inferior a un $\delta > 0$ dado, que denotamos por $\{U_i\}_{i=1}^\infty$. Aplicando la función H_λ a dicha familia, obtenemos otro recubrimiento $\{U_i'\}_{i=1}^\infty$ de λE de forma que existe la relación

$$\operatorname{diam}(U_i) = |\lambda| \operatorname{diam}(U_i') = \lambda \operatorname{diam}(U_i') \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

De esta forma, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\alpha_\delta(\lambda E) &= \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} U_i')^\alpha : (\lambda E) \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i', \text{ con } \operatorname{diam} U_i' \leq \delta \text{ para todo } i \geq 1 \right\} = \\ &= \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam}(\lambda U_i))^\alpha : (\lambda E) \subset \bigcup_{i=1}^\infty (\lambda U_i), \text{ con } \operatorname{diam} \lambda U_i \leq \delta \text{ para todo } i \geq 1 \right\} = \\ &= \text{ínf} \left\{ \lambda^\alpha \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} U_i)^\alpha : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i, \text{ con } \operatorname{diam} U_i \leq \frac{\delta}{\lambda} \text{ para todo } i \geq 1 \right\} = \\ &= \lambda^\alpha \, \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^\infty (\operatorname{diam} U_i)^\alpha : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty U_i, \text{ con } \operatorname{diam} U_i \leq \frac{\delta}{\lambda} \text{ para todo } i \geq 1 \right\} = \\ &= \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha_{\delta/\lambda}(E). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando δ tiende a 0, se obtiene que

$$\mathcal{H}^\alpha(\lambda E) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E).$$

$\square$

A partir de este momento pasamos de trabajar en $\mathbb{R}^d$ a hacerlo en un espacio métrico cualquiera (M, d), salvo que se indique lo contrario. Es importante señalar que las definiciones de $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ y $\mathcal{H}^\alpha$ son análogas a las que se han visto hasta ahora. Para comenzar, vamos a probar una serie de propiedades fundamentales que satisface la medida que hemos definido.

Proposición 2.3.6. *Sea (M, d) un espacio métrico cualquiera. Se tienen las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0$.

2. *Si $E_1 \subset E_2$, ambos subconjuntos de M, entonces $\mathcal{H}^\alpha(E_1) \leq \mathcal{H}^\alpha(E_2)$. Es decir, la medida es monótona.*

3. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ una familia numerable de conjuntos en M. Entonces,*

$$\mathcal{H}^\alpha(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha(E_i).$$

   En otras palabras, la medida es subaditiva.

4. *Sean E_1 y E_2 dos subconjuntos distantes de M, es decir, con $d(E_1, E_2) > 0$. Se tiene, en ese caso, que*

$$\mathcal{H}^\alpha(E_1 \cup E_2) = \mathcal{H}^\alpha(E_1) + \mathcal{H}^\alpha(E_2).$$

Demostración.

1. Dado un $\delta > 0$, cualquier familia de conjuntos de diámetro menor que δ recubre al conjunto vacío. En particular, el propio conjunto es un recubrimiento de sí mismo con diámetro nulo. Como buscamos el ínfimo de sumas de diámetros de recubrimientos es claro que dicho valor será el 0. Por tanto, se sigue que $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0$.

2. Si $E_1 \subset E_2$ se tiene que todo δ-recubrimiento del segundo lo es del primero, para todo $\delta > 0$. Por tanto, el conjunto de sumas de diámetros de los elementos del recubrimiento es mayor para E_1 que para E_2, al poder tomar el primero un mayor número de posibilidades a la hora de cubrir todo el conjunto. Consecuentemente el ínfimo en el conjunto de sumas para E_1 será menor o igual que en el de E_2, teniéndose que

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(E_1) \leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(E_2).$$

   Finalmente, haciendo tender δ a 0 se tiene que $\mathcal{H}^\alpha(E_1) \leq \mathcal{H}^\alpha(E_2)$, como se quería probar.

3. Sea $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$, para cada i, escogemos un recubrimiento $\{U_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ de E_i cuyos elementos son conjuntos de diámetro menor que δ. Además, escogemos dicho recubrimiento de forma que satisfaga la siguiente propiedad:

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{diam} U_{i,j})^{\alpha} \leq \mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Tenemos por tanto, que $\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} U_{i,j}$ es un recubrimiento de E constituido por conjuntos de diámetro menor que δ. Luego, se tiene que

$$\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(E_i) + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(E_i) + \varepsilon$$

ya que en el segundo término aparece la serie geométrica de razón y término inicial $1/2$. Como ya se ha comentado, se satisface relación $\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(E_i) \leq \mathcal{H}^{\alpha}(E_i)$ para todo $i \geq 1$. Por tanto, se sigue de lo anterior que,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_{\delta}^{\alpha}(E_i) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^{\alpha}(E_i) + \varepsilon.$$

Como el valor de ε es arbitrario podemos hacer que tienda a cero. Por último, tomando límite cuando δ tienda a cero, habremos probado la subaditividad de la medida exterior de Hausdorff, es decir,

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E) = \mathcal{H}^{\alpha}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^{\alpha}(E_i).$$

4. Para probar la igualdad es suficiente demostrar que

$$\mathcal{H}^{\alpha}(E_1 \cup E_2) \geq \mathcal{H}^{\alpha}(E_1) + \mathcal{H}^{\alpha}(E_2)$$

pues la desigualdad contraria se tiene gracias a la subaditividad de la medida, probada anteriormente.

Como E_1 y E_2 son distantes, se tiene que la distancia entre ellos es estrictamente positiva, es decir, $d(E_1, E_2) > 0$, entendiéndose la distancia entre dichos conjuntos como

$$d(E_1, E_2) = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in E_1 \text{ e } y \in E_2\}.$$

Por tanto, podemos considerar un $\varepsilon > 0$ de forma que $d(E_1, E_2) > \varepsilon$. Sea δ de forma que $0 < \delta < \varepsilon$, consideramos un δ-recubrimiento cualquiera de $E_1 \cup E_2$ formado por una familia de conjuntos $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de forma que si algún U_i corta a

E_1, el mismo conjunto del recubrimiento no corta a E_2, y viceversa. De esta forma, si consideramos el conjunto

$$J_1 = \{i \in \mathbb{N} : U_i \cap E_1 \neq \emptyset\},$$

podemos decir que $\{U_i\}_{i\in J_1}$ es un δ-recubrimiento de E_1.

Como $U_i \cap E_1 \neq \emptyset$ implica, por lo dicho anteriormente, que $U_i \cap E_2 = \emptyset$, definimos el conjunto J_2 como

$$J_2 = \{i \in \mathbb{N} : U_i \cap E_2 \neq \emptyset\} = \mathbb{N} \setminus J_1,$$

teniéndose en este caso que $\{U_i\}_{i\in J_2}$ se trata de un δ-recubrimiento de E_2.

Por la propia definición, los conjuntos de una familia son disjuntos con los de la otra. Por tanto, se tiene que

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(E_1) + \mathcal{H}^\alpha_\delta(E_2) \leq \sum_{i\in J_1} (\operatorname{diam} U_i)^\alpha + \sum_{j\in J_2} (\operatorname{diam} U_j)^\alpha \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_k)^\alpha.$$

Con esto hemos llegado a una desigualdad en la que aparecen una suma de diámetros de recubrimientos para E_1, otra para el conjunto E_2 y, cuya suma está acotada superiormente por un sumatorio correspondiente a recubrimientos de la unión $E_1 \cup E_2$. Como dicha relación se tiene para todo recubrimiento de los descritos al principio, tomamos el ínfimo entre todos ellos, obteniendo lo siguiente

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(E_1) + \mathcal{H}^\alpha_\delta(E_2) \leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(E_1 \cup E_2).$$

Por último, hacemos tender δ a 0. Esto queda totalmente justificado ya que la desigualdad es válida para todo $\delta \in (0, \varepsilon)$. Con todo ello obtenemos la desigualdad deseada

$$\mathcal{H}^\alpha(E_1) + \mathcal{H}^\alpha(E_2) \leq \mathcal{H}^\alpha(E_1 \cup E_2).$$

Contando con la subaditividad de la medida, que nos da la desigualdad contraria, llegamos a que

$$\mathcal{H}^\alpha(E_1) + \mathcal{H}^\alpha(E_2) = \mathcal{H}^\alpha(E_1 \cup E_2),$$

siempre que los dos conjuntos implicados sean distantes entre sí.

□

En cuanto al resultado anterior cabe señalar que de las tres primeras propiedades se deduce que la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^\alpha$ es una medida exterior en el espacio métrico (M, d). De hecho, basa darse cuenta que se corresponden con las tres afirmaciones que se exigen en la Definición 2.2.1. Por otra parte, al cumplirse la cuarta propiedad podemos afirmar que la medida de Hausdorff es, además, una medida exterior métrica.

Además, aunque no se haya dicho explícitamente, a lo largo de la prueba anterior hemos probado que la medida $\mathcal{H}_\delta^\alpha$ es medida exterior para todo $\delta > 0$. Sin embargo, no se trata de una medida exterior métrica en general.

Gracias al Teorema de Carathéodory sabemos que la restricción de nuestra medida exterior métrica a la colección de conjuntos medibles en el sentido de Carathéodory da lugar a una medida. Más aún, podemos afirmar que todos los conjuntos de Borel son medibles en el sentido de Carathéodory para la medida de Hausdorff.

Vamos a proceder ahora a exponer una serie de resultados y propiedades fundamentales de la medida de Hausdorff, siendo muchas de ellas consecuencias directas de la definición.

En general, la medida de Hausdorff es una generalización de las ideas usuales que se tienen de longitud, área o volumen en cualquier dimensión. De hecho, se puede probar que la d-dimensional medida de Hausdorff en $\mathbb{R}^d$ es, salvo producto por una constante, igual que la medida de Lebesgue d-dimensional.

De esta forma, podemos considerar que para $\alpha = 0$, el valor $\mathcal{H}^0(E)$ cuantifica el número de puntos que constituyen el conjunto E. Así, si consideramos un conjunto discreto de puntos $E = \{P_1, \cdots, P_l\}$, un δ-recubrimiento estaría compuesto por abiertos que recubran a cada punto por separado. Al considerar $\alpha = 0$, los diámetros de estos abiertos los estamos elevando a 0 en el cálculo de la medida de Hausdorff de E. Por tanto, estamos sumando el número de abiertos del recubrimiento que, al tomar ínfimo, equivale al número de puntos que conforman E.

Cabe señalar que, de forma conveniente, se va a considerar 0^0 igual a la unidad, puesto que podemos encontrarnos con este problema en el caso anterior: díametros que tienden a 0 elevados, a su vez, a 0. Con ello conseguimos que el significado de la medida 0- dimensional sea el que buscábamos: cuantificar los elementos de un conjunto.

Continuando con las observaciones que se estaban haciendo, $\mathcal{H}^1(E) = m(E)$ para cualquier conjunto de Borel E de $\mathbb{R}$, donde m denota a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. De hecho, cualquier conjunto de diámetro δ está contenido en un intervalo de la recta real de longitud δ. Por tanto, en dimensión 1, la medida de Hausdorff cuantifica la longitud de cualquier curva regular. En dimensión 2, estaríamos midiendo el área de cualquier superficie regular, salvo producto por una constante y, así, para cualquier otra dimensión $d \geq 3$.

Con el objetivo de formalizar este razonamiento damos paso a enunciar el siguiente resultado.

Proposición 2.3.7. *Sea μ una medida en los Borel de $\mathbb{R}^d$, invariante por traslaciones y de forma que $\mu([0,1]^d) < \infty$. Entonces existe una constante $c \in [0, +\infty)$ de forma que*

$$\mu(B) = c \cdot m(B), \qquad \textit{para todo } B \textit{ Borel en } \mathbb{R}^d,$$

siendo m la medida de Lebesgue en dimensión d.

Demostración. En primer lugar, es importante señalar que no importa considerar cubos (intervalos en dimensión d) cerrados, abiertos o semi-cerrados puesto que la medida de la frontera de dichos cubos es siempre 0. Supongamos, por ejemplo, que L es la frontera del cubo unidad $[0,1]^d$. Gracias a que la medida μ es invariante por traslaciones, podemos ir desplazando el conjunto L a lo largo del cubo de forma que, la medida de dicho cubo sea finalmente una suma infinita de la medida de L,

$$\mu([0,1]^d) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(L).$$

Si $\mu(L)$ es una constante no nula, la suma total sería ∞, lo que supone una contradicción con nuestra hipótesis $\mu([0,1]^d) < \infty$. Con esto podemos afirmar que

$$\mu((0,1)^d) = \mu((0,1]^d) = \mu([0,1]^d).$$

Consideramos entonces el cubo unidad $Q = [0,1]^d$ de forma que denotamos por c a $\mu(Q)$. Si $c = 0$, considerando $\mathbb{R}^d$ como unión numerable de cubos $Q + x$ con $x \in \mathbb{Z}^d$, tendríamos que $\mu(\mathbb{R}^d) = 0$ gracias a la propiedad de invarianza de la medida pos traslaciones y, por hipótesis, $c = 0$, por lo que en este caso se cumple el resultado del enunciado $\mu(A) = c \cdot m(A)$ para todo A Borel en $\mathbb{R}^d$.

Estudiemos ahora el caso en el que $0 < c < \infty$. Vamos a demostrar que el valor $\lambda = \mu/c$ es exactamente la medida de Lebesgue m. En primer lugar, observemos que son invariantes por traslaciones y que, además, coinciden en el cubo unidad de dimensión d. En efecto,

$$\lambda(Q) = \frac{1}{c}\mu(Q) = \frac{1}{\mu(Q)}\mu(Q) = 1 = m(Q).$$

A continuación, para cada $k \in \mathbb{N}$, dividimos el intervalo $[0,1]$ en k intervalos disjuntos de forma que

$$[0,1] = \left[0, \frac{1}{k}\right] \cup \left[\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{k-1}{k}, 1\right].$$

De esta forma, Q se descompone en unión disjunta de k^d cubos Q_i, que son traslaciones del cubo $[0, \frac{1}{k}]^d$. Por lo tanto, se tiene que

$$k^d \lambda(Q_i) = \sum_{i=1}^{k^d} \lambda(Q_i) = \lambda(Q) = m(Q) = \sum_{i=1}^{k^d} m(Q_i) = k^d m(Q_i),$$

pudiendo afirmar, de esta forma, que λ y m coinciden en cada Q_i y, consecuentemente, en cada cubo de lado $\frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por aditividad, podemos decir también que ambos valores coinciden en cada rectángulo $[p, q]$ con $q - p \in \mathbb{Q}^d$. De hecho, si $p = 0$ y $q = q_i \in \mathbb{Q}^d$, podemos expresar el rectángulo $[0, q]$

$$[0, q] = [0, q_1] \times [0, q_2] \times \cdots \times [0, q_d], \qquad \text{con } q_i \in \mathbb{Q}^+,$$

como unión finita disjunta de cubos de lado $\frac{1}{k}$, siendo k el mínimo común múltiplo de los denominadores de los números q_i. Por tanto, λ y m coinciden sobre todos ellos y, por traslación, sobre todos los rectángulos $[p, q]$ con $q - p \in \mathbb{Q}^d$. En realidad, podemos afirmar que las medidas coinciden sobre todos los rectángulos en $\mathbb{R}^d$, pues si tenemos uno de ellos, basta tomar una sucesión $[p_n, q]$ tendiendo a $[p, q]$ con $q - p \in \mathbb{Q}^d$, de forma que estaríamos en el caso anterior.

El siguiente paso es probar que para todo Borel $B \subset [0, 1]^d$ se tiene que $\lambda(B) = m(B)$. En primer lugar, tenemos que $\lambda(B) \leq m(B)$ para todo B Borel debido a la propia definición de la medida de Lebesgue, sin necesidad de imponer que $B \subset [0, 1]^d$. De hecho, si $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}$ siendo cada I_j un intervalo en $\mathbb{R}^d$, se tiene que

$$\lambda(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(I_j).$$

Tomando ínfimo entre todos los intervalos que recubren a B, se tiene que

$$\lambda(B) \leq m(B). \tag{2.3}$$

Para llegar a la igualdad, empezamos escribiendo el cubo unidad como

$$[0, 1]^d = B \sqcup ([0, 1]^d \setminus B)$$

de forma que se tiene

$$1 = \lambda(B) + \lambda([0, 1]^d \setminus B) \leq m(B) + m([0, 1]^d \setminus B) \leq 1$$

y, de esta forma, $\lambda(B) = m(B)$ para todo conjunto de Borel B contenido en $[0, 1]^d$. Igualmente se puede razonar si B está incluido en algún cubo Q que no sea el cubo unidad.

Finalmente, si $B \subset \mathbb{R}^d$, es posible escribir dicho conjunto como

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([-n,n]^d \cap B),$$

de forma que podemos afirmar que

$$\lambda(B) = m(B) \quad \text{para todo } B \subset \mathbb{R}^d \tag{2.4}$$

y, por consiguiente,

$$\mu(B) = c \cdot m(B) \quad \text{para todo } B \text{ Borel en } \mathbb{R}^d.$$

□

Cabe señalar que la proposición anterior se sigue verificando si en $\mathbb{R}^d$ en lugar de la distancia euclídea se considera cualquier distancia que provenga de una norma. De dicho resultado podemos extraer como corolario el caso particular para la medida que estamos estudiando.

Corolario 2.3.8. *Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$, consideramos la medida d-dimensional de Hausdorff asociada a $\|\cdot\|$. Entonces existe una constante dependiente de la norma, $c > 0$, tal que*

$$m(E) = c\mathcal{H}^d(E)$$

para todo conjunto de Borel E.

Demostración. Gracias a la proposición anterior, sabemos que existe una constante $d \in [0, +\infty)$ de forma que

$$\mathcal{H}^d(E) = d \cdot m(E)$$

para todo conjunto de Borel E en $\mathbb{R}^d$. Como sabemos que la medida d- dimensional de Lebesgue del cubo unidad es 1, tenemos que

$$\mathcal{H}^d([0,1]^d) = d.$$

Por tanto, se tiene que

$$m(E) = c \cdot \mathcal{H}^d(E) \quad \text{para todo } E \text{ Borel en } \mathbb{R}^d,$$

siendo $c^{-1} = \mathcal{H}^d([0,1]^d)$. □

Otro resultado que se sigue justamente de lo anterior es el siguiente.

Corolario 2.3.9. *Para todo $E \subset \mathbb{R}^d$, se tiene que*

$$m^*(E) = c\mathcal{H}^d(E).$$

Demostración. Como m^* y $\mathcal{H}^d$ son medidas exteriores regulares, se tiene que existe un conjunto de Borel G_1 de forma que $E \subset G_1$ y verificando

$$m^*(E) = m(G_1)$$

y, análogamente, existe un conjunto de Borel G_2 con $E \subset G_2$ de forma que

$$\mathcal{H}^\alpha(E) = \mathcal{H}^\alpha(G_2).$$

Por tanto, como $G_1 \cap G_2$ es también un conjunto de Borel, gracias al Corolario 2.3.8 se tiene que existe una constante dependiente del diámetro, $c_d > 0$, de forma que

$$m^*(G_1 \cap G_2) = c\mathcal{H}^d(G_1 \cap G_2).$$

Como $E \subset G_1 \cap G_2 \subset G_1, G_2$ se tiene que

$$m^*(E) \leq m^*(G_1 \cap G_2) = c\mathcal{H}^d(G_1 \cap G_2) \leq c\mathcal{H}^d(G_2) = c\mathcal{H}^d(E),$$

donde se ha utilizado, entre otras cosas, la monotonía de ambas medidas.

Por otra parte,

$$m^*(E) = m^*(G_1) \geq m^*(G_1 \cap G_2) = c\mathcal{H}^d(G_1 \cap G_2) \geq c\mathcal{H}^d(E).$$

Como hemos obtenido las dos desigualdades en sentidos opuestos, tenemos la igualdad que se quería demostrar. □

En diversas fuentes bibliográficas se enuncia este mismo resultado pero con una constante distinta. Su prueba no es inmediata y, por tanto, citaremos más adelante la referencia en la que se pueden consultar los detalles de la demostración. Aún así, enunciamos el resultado tal y como se hace en [SS2], aunque insistimos en que el enunciado es análogo al anterior.

Proposición 2.3.10. *Sea E un subconjunto de Borel de $\mathbb{R}^d$ y m denotando la medida de Lebesgue de dimensión d. Si consideramos la norma euclídea, se satisface que*

$$m(E) = c_d\mathcal{H}^d(E), \tag{2.5}$$

siendo c_d una constante que depende unicamente de la dimensión d.

Para ser más exactos, se puede probar que la constante c_d es igual a

$$c_d = \frac{m(B)}{2^d}$$

siendo B la bola unidad en dimensión d. Detallando un poco más sobre estos datos, podemos afirmar que el valor de $m(B)$ corresponde a

$$m(B) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

por lo que, si distinguimos los casos de dimensión par e impar el valor de la constante c_d queda determinado de la siguiente forma

$$c_d = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^d(\frac{d}{2})!} & \text{si } d \text{ es par,} \\ \\ \pi^{\dfrac{d-1}{2}} \dfrac{((n-1)/2)!}{n!} & \text{si } d \text{ es impar.} \end{cases}$$

La prueba de este enunciado recae sobre una desigualdad cuyo fundamento es el hecho de que entre todos los conjuntos de un diámetro fijado, la bola es el conjunto con mayor volumen para la norma fijada en el enunciado. En particular, la bola unidad es el conjunto de mayor volumen d-dimensional de diámetro 2. Tal y como se dijo anteriormente, nosotros no entraremos en detalles sobre este procedimiento pero es posible encontrarlo en [Ext].

Así, la diferencia entre los resultados obtenidos en el Corolario 2.3.8 y la Proposición 2.3.10 es que en el primer caso la constante obtenida depende de la norma que se haya fijado, mientras que en el segundo resultado únicamente depende de la dimensión del espacio en el que nos encontremos.

Otra observación de importancia que podemos hacer es que, si en el Corolario 2.3.8 tomamos la norma del máximo, es decir,

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq d} |x_j| \quad \text{para todo } \underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

la constante que se obtiene es $c = 1$. Esto se debe al hecho de que si $A \subset \mathbb{R}^d$ tiene diámetro igual a λ para la norma infinito, existe un cubo Q de lado mayor con $A \subset Q$. De hecho, basta tomar

$$a_j = \inf\{x_j : \underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \in A\}$$

y considerar el cubo Q como

$$Q = \prod_{j=1}^{d} [a_j, a_j + \lambda].$$

De aquí en adelante consideraremos en $\mathbb{R}^d$ la distancia euclídea, mientras no se diga lo contrario. En ese caso, la constante obtenida depende de la dimensión, tal y como se indicó en la Proposición 2.3.10.

2.4. Dimensión de Hausdorff.

Comenzamos esta sección probando un resultado que liga los conceptos estudiados hasta ahora con los nuevos que vamos a definir de aquí en adelante.

Proposición 2.4.1. *Si $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$ y $\beta > \alpha$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$. Igualmente, si $\mathcal{H}^\alpha(E) > 0$ y $\beta < \alpha$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$.*

Demostración. Para el primer caso supongamos que $\beta > \alpha$ y sea $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ un δ-recubrimiento de E, de forma que se tiene

$$(\operatorname{diam} U_i)^\beta = (\operatorname{diam} U_i)^{\beta-\alpha}(\operatorname{diam} U_i)^\alpha \leq \delta^{\beta-\alpha}(\operatorname{diam} U_i)^\alpha \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Consecuentemente, sumando los diámetros y tomando ínfimo entre todos los δ-recubrimientos de E, se tiene que

$$\mathcal{H}^\beta_\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}\mathcal{H}^\alpha_\delta(E) \leq \delta^{\beta-\alpha}\mathcal{H}^\alpha(E),$$

debiéndose la última desigualdad a una propiedad indicada justo después de la Definición 2.3.2. Como $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$ y $\beta - \alpha > 0$, al tomar límite cuando δ tiende a 0 obtenemos que

$$\mathcal{H}^\beta(E) \leq 0$$

lo que implica directamente que $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$, al tratarse de una cantidad que siempre es no negativa.

Para la otra propiedad, razonamos por reducción al absurdo y suponemos que $\mathcal{H}^\beta(E) < +\infty$. Gracias a todo lo anterior, como $\beta < \alpha$, se tiene que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$, lo que supone una contradicción con la hipótesis de que $\mathcal{H}^\alpha(E)$ es estrictamente positiva. Por tanto, podemos concluir que, en las condiciones del enunciado, $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$. □

Este resultado concuerda con una de las observaciones que se expusieron al principio del capítulo. Si un conjunto E es de dimensión α, comparado con conjuntos de dimensión $\beta > \alpha$ resulta casi insignificante en cuanto al tamaño se refiere, por lo que $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$. De la misma forma, si lo comparamos con conjuntos de dimensión estrictamente menor que α (β es ahora esa dimensión menor), su tamaño es considerablemente mayor, teniéndose que $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$ en ese caso.

Las diferentes relaciones que se ofrecen en la Proposición 2.4.1 justifican el hecho de que, para un cierto conjunto de Borel E de $\mathbb{R}^d$ exista un único $\alpha \in [0, \infty]$ verificando que

$$\mathcal{H}^\beta(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } \beta < \alpha, \\ 0 & \text{si } \alpha < \beta. \end{cases}$$

El razonamiento que garantiza este hecho se podría decir que es trivial. Si existieran dos números α_1, α_2 verificando esa condición y teniéndose que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, entonces uno sería mayor que el otro necesariamente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha_1 < \alpha_2$. En ese caso, tomamos cualquier α_3 verificando

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2.$$

Como α_1, α_2 verifican la condición enunciada al principio, se tendría por una parte que $\mathcal{H}^{\alpha_3}(E) = 0$, si calculamos la medida fijándonos en α_1; y, si lo hacemos desde el punto de vista de α_2, se tendría que $\mathcal{H}^{\alpha_3}(E) = \infty$, lo que supone una contradicción.

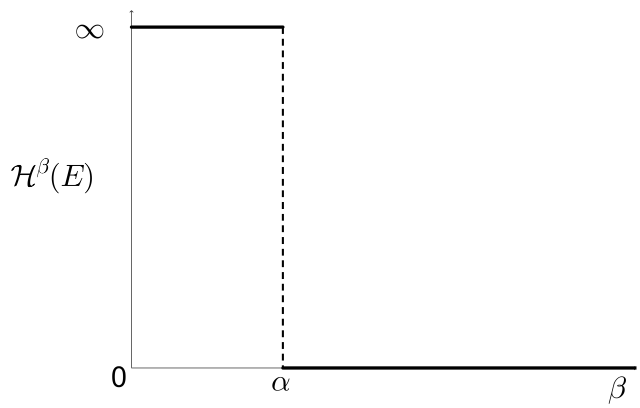

Figura 2.1: Representación gráfica de la dimensión de Hausdorff de $E \subset \mathbb{R}^d$.

La existencia de este número da lugar a la definición de dimensión de Hausdorff.

Definición 2.4.2. *Sea E subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Se denomina dimensión de Hausdorff de E al número α dado por*

$$\alpha = \sup\{\beta : \mathcal{H}^\beta(E) = \infty\} = \text{ínf}\{\beta : \mathcal{H}^\beta(E) = 0\}.$$

En ese caso diremos que E tiene dimensión de Hausdorff α y escribiremos $\dim_{\mathcal{H}} E = \alpha$.

La condición que ha de cumplir la dimensión α se sigue de la propiedad que se ha expuesto al principio de la sección. Tal y como se ha dicho, ese valor es único y, además, presenta la peculiaridad de que puede ser un número fraccionario. De esta propiedad se debe el término de conjunto fractal, aplicado a diversas figuras o fenómenos que se dan en la naturaleza u otros ámbitos de la vida cotidiana, en los que aparece cierta relación geométrica de una figura dada con fragmentos de ella a menor escala. Los conjuntos fractales son aquellos que poseen dimensión de Hausdorff fraccionaria.

Sobre la medida del conjunto en el valor correspondiente a su dimensión, por ahora solamente podemos decir que satisface $0 \leq \mathcal{H}^\alpha(E) \leq \infty$, aunque en diferentes ejemplos se puedan dar cotas más aproximadas. Cuando las desigualdades entre 0 e infinito sean estrictas, diremos que el conjunto E tiene dimensión de Hausdorff estrictamente α.

A continuación vamos a ver un ejemplo común para tener una primera toma de contacto con la medida de Hausdorff y la dimensión.

Ejemplo 2.4.3. Consideramos el disco unidad en dimensión 2, al que denotamos por D. Utilizando la Proposición 2.3.10 vamos a hacer una serie de razonamientos sobre la medida de Hausdorff de D en diferentes dimensiones.

Como la medida 1-dimensional coincidía con la longitud o, dicho de otra forma, $c_1 = 1$ y $m(D) = \text{long}(D)$ en este caso, se tiene que que $\mathcal{H}^1(D) = \infty$. En segundo lugar, tenemos que $\mathcal{H}^2(D) = \frac{4}{\pi}\,\text{área}(D) = \frac{4}{\pi}\pi 1^2 = 4$. Por último, $\mathcal{H}^3(D) = \frac{6}{\pi}\,\text{vol}(D) = 0$. En definitiva, con lo que nos debemos quedar del resultado es que se ha obtenido $\mathcal{H}^1(D) = \infty$, $0 < \mathcal{H}^2(D) < \infty$ y $\mathcal{H}^3(D) = 0$. Esto quiere decir que la dimensión de Hausdorff del disco es $\alpha = 2$, verificandose que $\mathcal{H}^\beta(D) = \infty$ si $\beta < 2$ y $\mathcal{H}^\beta(D) = 0$ si $\beta > 2$.

Vamos ahora a enumerar una seria de propiedades de la dimensión de Hausdorff, siendo la mayoría consecuencia directa de las definiciones de dimensión y medida de Hausdorff.

Proposición 2.4.4.

1. *Sean E y F dos subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ de forma que $E \subset F$. Entonces,* $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F)$.

2. *Sea $E_1, E_2, \dots$ una sucesión numerable de conjuntos de $\mathbb{R}^d$. Entonces, se satisface que*

$$\dim_{\mathcal{H}}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_{\mathcal{H}} E_i\}.$$

3. *Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, entonces* $0 \leq \dim_{\mathcal{H}}(E) \leq d$.

4. *Sea E un conjunto numerable. Entonces* $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$.

5. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^d$. Entonces,* $\dim_{\mathcal{H}} U = d$.

Demostración. 1. Debido a la monotonía de la medida de Hausdorff, es decir, $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ para todo s, se tiene que

$$\{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(F) = 0\} \subset \{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(E) = 0\}$$

ya que si $\mathcal{H}^\beta(F) = 0$ se tiene inmediatamente que $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$, pero no necesariamente al contrario. Por tanto, al contener el conjunto de la derecha un mayor número de elementos que el de la izquierda, se tiene que

$$\text{ínf}\{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(E) = 0\} \leq \text{ínf}\{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(F) = 0\}.$$

Y, siguiendo la definición de dimensión de Hausdorff,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

Análogamente se puede desarrollar la prueba utilizando la definición de dimensión como el supremo de valores β tales que la medida β-dimensional de Hausdorff es ∞.

2. Evidentemente, $E_j \subset \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ para todo $j = 1, 2, \cdots$. Por tanto, por la monotonía de la dimensión probada anteriormente se tiene que

$$\dim_{\mathcal{H}} E_j \leq \dim_{\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^\infty E_i \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Como la desigualdad es cierta para cualquier valor de j, en particular lo será para el supremo, es decir:

$$\sup_{1\leq j<\infty} \{\dim_{\mathcal{H}} E_j\} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{i=1}^\infty E_i).$$

Probamos ahora la desigualdad contraria. Para ello, supongamos que $\beta > \dim_{\mathcal{H}}(E_i)$ para todo $i \geq 1$. En ese caso, ya hemos visto en varias ocasiones que se tiene $\mathcal{H}^\beta(E_i) = 0$, para todo valor de i. Por tanto, haciendo uso de la subaditividad de la medida tenemos que

$$\mathcal{H}^\beta(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^\beta(E_i) = \sum_{i=1}^\infty 0 = 0.$$

Es decir, cualquier dimensión β que anule la medida β-dimensional de todos los conjuntos E_i, anula la medida correspondiente a la unión numerable de todos ellos. En otras palabras,

$$\{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(E_i) = 0 \text{ para todo } i \geq 1\} \subset \{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = 0\}.$$

Acorde a esa conclusión, el valor del ínfimo será menor en el conjunto que contiene mayor número de elementos, por lo que se tiene que

$$\text{ínf}\{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = 0\} \leq \text{ínf}\{\beta \text{ tal que } \mathcal{H}^\beta(E_i) = 0 \text{ para todo } i \geq 1\}.$$

De aquí se deduce que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sup_{1\leq i<\infty} \{\dim_{\mathcal{H}}(E_i)\}$$

dando por concluida, junto a la otra desigualdad, la prueba de esta propiedad.

3. Sean B_n las bolas de centro el origen y radio $n > 0$, es decir, $B_n = B(0, n)$. Gracias a la expresión 2.5 tenemos que

$$\mathcal{H}^d(B_n) = c_d m(B_n),$$

siendo m la medida de Lebesgue en dimensión d. Como dicha medida para la bola es finita y positiva, se tiene que $\mathcal{H}^d(B_n) \in (0, +\infty)$, por lo que podemos afirmar que

$$\dim_{\mathcal{H}}(B_n) = d \quad \text{ para todo } n > 0,$$

por los resultados ya conocidos sobre la dimensión.

Por otra parte, sabemos que $\mathbb{R}^d$ se puede construir como una unión numerable de las bolas que hemos definido, por lo que si tenemos en cuenta el apartado anterior de esta proposición, tenemos que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^d) = \dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sup_{1\leq n\leq\infty} \{\dim_{\mathcal{H}} B_n\} = d.$$

Tomamos ahora un subconjunto cualquiera E de $\mathbb{R}^d$. Sabemos, por la propia definición de dimensión de Hausdorff, que la dimensión de este conjunto es no negativa. Este hecho unido al apartado 1 de esta proposición dan lugar a

$$0 \leq \dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^d) = d,$$

teniéndose, de esta forma, las desigualdades que se querían probar.

4. Sea E_i el conjunto formado por un solo punto. Sabemos que la medida 0-dimensional de un conjunto cuantifica el número de puntos que hay en dicho conjunto. Por tanto, $\mathcal{H}^0(E_i) = 1$, siendo $\dim_{\mathcal{H}} E_i = 0$. Si consideramos ahora el conjunto E como unión numerable de conjuntos del tipo E_i, tendremos que $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Por la segunda propiedad se tiene que

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \dim_{\mathcal{H}}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sup_{1\leq i<\infty} \{\dim_{\mathcal{H}} E_i\} = 0$$

Por lo que se deduce que $\dim_{\mathcal{H}}(E) = 0$.

5. Por la tercera propiedad que hemos visto se tiene inmediatamente que

$$\dim_{\mathcal{H}} U \leq d,$$

al tratarse de un subconjunto del espacio $\mathbb{R}^d$.

Por otra parte, al tratarse de un abierto, contiene una bola (llamémosla B) de medida de Hausdorff d-dimensional estrictamente positiva. Por tanto, $d = \dim_{\mathcal{H}} B \leq \dim_{\mathcal{H}} U$. De esta forma queda demostrada esta última propiedad.

□

A continuación vamos a exponer una serie de conceptos que nos ayudarán a estudiar el comportamiento de la medida de Hausdorff y de la dimensión en diversas aplicaciones. El concepto principal que se va a estudiar es el de función de Lipschitz.

Definición 2.4.5. *Sean (M, d_M) y (N, d_N) espacios métricos. Se dice que una función $f : M \to N$ satisface la condición de Lipschitz con exponente $\gamma > 0$ ó, que es γ-Hölderiana si*

$$d_N(f(x) - f(y)) \leq C d_M(x,t)^\gamma \quad \textit{para todo } x, y \in M,$$

siendo C una constante positiva. Si $\gamma = 1$, diremos simplemente que f es Lipschitziana de constante C.

Lema 2.4.6. *Sean (M, d_M) y (N, d_N) espacios métricos y E un subconjunto compacto de M. Sea también $f : M \to N$ una función que satisface la condición de Lipschitz con exponente γ. Entonces*

1. *$\mathcal{H}^\beta(f(E)) \leq C^\beta \mathcal{H}^\alpha(E)$ si $\beta = \alpha/\gamma$, siendo C la constante de la condición que cumple f.*
2. *$\dim_{\mathcal{H}} f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_{\mathcal{H}} E$.*

Demostración. 1. Sea $\delta > 0$, consideramos un δ-recubrimiento de E al que denotamos por $\{U_i\}_{i=1}^\infty$. En ese caso, se tiene que $\{f(E \cap U_i)\}_{i=1}^\infty$ es un recubrimiento de $f(E)$. En efecto, veamos que todo elemento de $f(E)$ pertenece a algún conjunto de la familia $\{f(E \cap U_i)\}_{i=1}^\infty$. Sea $y \in f(E)$ se tiene que existe un elemento $x \in E$ de forma que $f(x) = y$. Como $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ es recubrimiento de E, existirá algún U_i con $x \in U_i$ y, consecuentemente, $x \in E \cap U_i$. De esta forma, $y = f(x) \in f(E \cap U_i)$.

Además, este recubrimiento satisface que el diámetro de cualquier elemento suyo $f(E \cap U_i)$ es menor que $C(\operatorname{diam} U_i)^\gamma$, tal y como vamos a probar a continuación. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sup\{d_N(x', y') : x', y' \in f(E \cap U_i)\} = \sup\{d_N(f(x), f(y)) : x, y \in E \cap U_i\} \leq \\ \leq \sup\{d_N(f(x), f(y)) : x, y \in U_i\},\end{aligned}$$

debiéndose esta última desigualdad al hecho de que $(E \cap U_i) \subset U_i$, por lo que el supremo en el segundo conjunto alcanzará un valor superior o igual al supremo en el primero. Como nuestra función cumple la condición de Lipschitz con exponente γ en E, en particular la cumple para cada uno de los elementos del recubrimiento intersecado con el conjunto, es decir,

$$d_N(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y)^\gamma \quad \text{para todo } x, y \in E \cap U_i.$$

Esto queda justificado ya que podemos tomar como recubrimiento de E la familia $\{E \cap U_i\}_{i=1}^\infty$ de forma que siguen siendo conjuntos de diámetro menor o igual que δ. Como consecuenta a lo anterior, tenemos que

$$d_N(f(x), f(y)) \leq C d_M(x, y)^\gamma \quad \text{para todo } x, y \in U_i.$$

Por tanto, siguiendo la cadena de desigualdades que teníamos obtenemos que

$$\sup\{d_N(f(x), f(y)) : x, y \in U_i\} \leq C \sup\{d_M(x, y)^\gamma : x, y \in U_i\}.$$

Siguiendo la definición de diámetro de un conjunto llegamos a que

$$\operatorname{diam}(f(E \cap U_i)) \leq C(\operatorname{diam} U_i)^\gamma \quad \text{para todo } i \geq 1,$$

de forma que $\{f(E \cap U_i)\}_{i=1}^\infty$ se trata de una familia de conjuntos de diámetro menor o igual que $C\delta^\gamma = \lambda$, verificándose que λ tiende a 0 cuando lo hace δ.

De esta forma, se tiene que para $\beta = \alpha/\gamma$,

$$(\operatorname{diam}(f(E \cap U_i)))^\beta \leq C^\beta (\operatorname{diam} U_i)^\alpha \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Calculando la suma a lo largo de ambos recubrimientos y tomando ínfimo en ambos términos obtenemos que

$$\mathcal{H}^\beta_\lambda(f(E)) \leq C^\beta \mathcal{H}^\alpha_\delta(E).$$

Haciendo δ tender a 0 y, de forma consecuente, también λ, llegamos a

$$\mathcal{H}^\beta(f(E)) \leq C^\beta \mathcal{H}^\alpha(E),$$

que es lo que queríamos probar.

2. Supongamos que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$, lo que significa que $\alpha \geq \dim_{\mathcal{H}} E$. Por el apartado anterior, este hecho implica que $\mathcal{H}^\beta(f(E)) = 0$ o, equivalentemente, $\beta = \frac{\alpha}{\gamma} \geq \dim_{\mathcal{H}} f(E)$. Por tanto, tenemos que para todo α verificando $\alpha \geq \dim_{\mathcal{H}} E$ se tiene que $\alpha \geq \gamma \dim_{\mathcal{H}} f(E)$. Luego, $\dim_{\mathcal{H}} E \geq \gamma \dim_{\mathcal{H}} f(E)$ y, por tanto,

$$\dim_{\mathcal{H}} f(E) \leq \frac{1}{\gamma} \dim_{\mathcal{H}} E,$$

como queríamos demostrar.

$\square$

Cabe señalar que en el lema anterior es suficiente que la función f esté definida y satisfaga la condición de ser γ-Hölderiana en el subconjunto E, en lugar de hacerlo en todo el espacio M. De hecho, la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^\alpha(E)$ solamente depende de las distancias en E y no del espacio métrico en el que E esté incluido.

2.5. Curvas Rectificables.

En esta sección haremos un breve estudio sobre medidas de Hausdorff y curvas rectificables, que se definirán más adelante. Para ello, ofreceremos una serie de resultados con el único fin de probar que la medida 1-dimensional de Haudorff de una curva rectificable definida en el intervalo $[0,1]$ es igual a la longitud de dicha curva.

Proposición 2.5.1. *Sea (E,d) un espacio métrico y conexo. Entonces,*

$$\operatorname{diam}(E) \leq \mathcal{H}^1(E). \tag{2.6}$$

Demostración. Como el conjunto E es conexo, dado un punto $a \in E$, podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x,a), \end{aligned}$$

es decir, la función que a cada punto del conjunto le asigna la distancia al punto fijado a. En primer lugar, tenemos que la función que hemos construido es Lipschitziana de constante 1, pues verifica que

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y) \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Además, sabemos que $0 \in f(E)$, pues basta aplicarle la función al mismo punto a. Por otra parte, dado otro punto $b \in E$ se tiene trivialmente que $d(a,b) \in f(E)$. Como $f(E)$ es conexo, el conjunto $[0, d(a,b)]$ está contenido en $f(E)$, por lo que el diámetro del conjunto imagen de la aplicación será, al menos, $d(a,b)$. Esto quiere decir que,

$$d(a,b) = \mathcal{H}^1([0, d(a,b)]) \leq \mathcal{H}^1(f(E)) \leq \mathcal{H}^1(E),$$

debiéndose la segunda desigualdad al Lema 2.4.6 y al hecho de que nuestra función era Lipschitziana de constante 1. Como el valor de b es arbitrario, tomando supremo para esta coordenada se tendría que,

$$\sup_{y \in E} d(a,y) \leq \mathcal{H}^1(E).$$

Análogamente, como la relación anterior es cierta para cualquier calor de a fijado previamente, tomamos supremo obteniendo

$$\sup_{x \in E} \sup_{y \in E} d(x,y) \leq \mathcal{H}^1(E)$$

que, en otras palabras, es lo mismo que decir

$$\operatorname{diam} E \leq \mathcal{H}^1(E),$$

como se quería probar. □

Definición 2.5.2. *Sea (E,d) un espacio métrico y $\gamma : [0,1] \to E$ una curva parametrizada de parámetro t con $0 \leq t \leq 1$. La curva γ es rectificable si existe una constante $M < \infty$ de forma que para cualquier partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$,*

$$\sum_{j=1}^{n} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq M. \tag{2.7}$$

Por definición, la longitud de la curva es el supremo sobre todas las particiones del sumatorio que aparece en el lado izquierdo de la desigualdad. De forma alternativa, se puede entender la longitud como el ínfimo de todas las constantes M que verifican 2.7. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.5.3. *La longitud de la curva definida en 2.5.2, $L(\gamma)$, se define como*

$$L(\gamma) = \sup_{0=t_o<t_1<\cdots<t_n=1} \sum_{j=1}^{n} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)). \tag{2.8}$$

Naturalmente, se sigue de la definición que $L(\gamma) < +\infty$.

De aquí en adelante, para conseguir una notación de mayor claridad, escribiremos la imagen de cualquier intervalo $\gamma((a,b))$ como $\gamma(a,b)$.

Proposición 2.5.4. *Sea un espacio métrico (E,d), $0 < \alpha < \infty$ y $\gamma : [0,1] \to E$ una función continua e inyectiva. Es decir, se puede entender también como una curva cuyo recorrido está en E y sin puntos de corte con él mismo. Entonces,*

$$\mathcal{H}^1(\gamma[0,1]) = L(\gamma).$$

Demostración. Consideramos una partición del intervalo $[0,1]$ que vamos a denotar como sigue:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1.$$

Vamos a comenzar probando la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \mathcal{H}^1(\gamma[0,1]),$$

de forma que tomaremos finalmente supremo a ambos lados para así, obtener una de las desigualdades deseadas. Se tiene para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ de la partición dada que

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) = \{\gamma(t) : t \in [t_{j-1}, t_j]\}.$$

Por tanto, si consideramos en particular la distancia entre los extremos del intervalo que estamos considerando se tendrá que

$$\begin{aligned} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \operatorname{diam}(\gamma[t_{j-1}, t_j]) &= \operatorname{diam}(\overline{\gamma(t_{j-1}, t_j)}) = \\ &= \operatorname{diam}(\gamma(t_{j-1}, t_j)) \leq \mathcal{H}^1(\gamma(t_{j-1}, t_j)), \end{aligned}$$

debiéndose la última desigualdad a la Proposición 2.5.1.

Como la función γ es inyectiva, los conjuntos $\gamma(t_{j-1}, t_j)$ son disjuntos dos a dos, por lo que si sumamos en j y utilizamos la aditividad de la medida de Hausdorff en los Borel, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^1(\gamma(t_{j-1}, t_j)) \leq \mathcal{H}^1(\gamma[0, 1]),$$

como se quería probar.

Cabe señalar que $\gamma(t_{j-1}, t_j) = \gamma[t_{j-1}, t_j] \setminus \{\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)\}$, es decir, es diferencia de dos compactos y, en consecuencia, es un conjunto de Borel.

Si en dicha expresión tomamos supremo de entre todas las particiones tenemos que

$$L(\gamma) \leq \mathcal{H}^1(\gamma[0, 1]).$$

A continuación, vamos a probar que $L(\gamma) \geq \mathcal{H}^1(\gamma[0, 1])$. Para ello, uno de los argumentos que utilizaremos al principio será la continuidad uniforme de la función γ. Consideramos una partición del intervalo $[0, 1]$,

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

de forma que para todo $j = 1, \ldots, n$ se verifique que $|t_j - t_{j-1}| < \delta$. De esta forma, por ser γ uniformemente continua se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de forma que si $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ (que se verifica, pues es la condición que hemos exigido a la partición) se tiene $d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j-1})) < \varepsilon$, siendo d la distancia que venimos considerando desde el enunciado. Si llamamos $A_j = \gamma([t_{j-1}, t_j])$ se tiene, en particular, y gracias a todo lo anterior que $\operatorname{diam} A_j < \varepsilon$. Como estos conjuntos que acabamos de definir constituyen un recubrimiento para $\gamma[0, 1]$, tenemos que

$$\mathcal{H}^1_\varepsilon(\gamma[0, 1]) \leq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam} A_j. \tag{2.9}$$

A continuación, nos fijamos en un subintervalo cualquiera de la partición, $[t_{j-1}, t_j]$. Por compacidad, sabemos que existen dos puntos u_j y s_j de forma que

$$d(\gamma(u_j), \gamma(s_j)) = \operatorname{diam} A_j.$$

Además, podemos suponer

$$t_{j-1} \leq u_j \leq s_j \leq t_j,$$

es decir, hemos encontrado dos puntos cuyas imágenes a través de γ alcanzan el supremo de la definición de diámetro del conjunto A_j correspondiente.

Sabemos que $L(\gamma)$ es el supremo del conjunto construido de la siguiente forma: dada una partición, se consideran las distancias entre las imágenes de los elementos de dicha partición. Se suman dichas distancias y, con ello, obtenemos un elemento del conjunto. Lo que vamos a hacer a continuación es considerar una partición particular y sumar dichas distancias, por lo que $L(\gamma)$ será mayor que dicha suma. La partición de la que hablamos es la siguiente:

$$0 = t_0 \leq u_1 \leq s_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{j-1} \leq u_j \leq s_j \leq t_j \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq u_n \leq s_n \leq t_n = 1$$

y, por tanto,

$$L(\gamma) \geq \sum_{j=1}^{n} [d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(u_j)) + d(\gamma(u_j), \gamma(s_j)) + d(\gamma(s_j), \gamma(t_j))] \geq$$
$$\geq \sum_{j=1}^{n} d(\gamma(u_j), \gamma(s_j)) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam} A_j.$$

Ligando adecuadamente esta expresión con la desigualdad 2.9, tenemos que

$$L(\gamma) \geq \mathcal{H}^1_\varepsilon(\gamma[0,1]).$$

Como el razonamiento era válido para todo $\varepsilon > 0$, hacemos tender este valor a 0 y obtenemos

$$L(\gamma) \geq \mathcal{H}^1(\gamma[0,1]).$$

Como tenemos las dos desigualdades probadas, damos por concluida la prueba de la proposición. □

2.6. Conjuntos de Cantor.

En esta sección trataremos de exponer ejemplos sobre la medida y dimensión de Hausdorff. En particular, vamos a estudiar el caso del conjunto de Cantor abstracto, que se describe como $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, para relacionarlo con el conjunto de Cantor de cualquier razón λ definido en la recta real. En concreto, nos detendremos en el conjunto de Cantor de razón un tercio. Por último, se expondrá un razonamiento análogo para estudiar el caso del conjunto de Cantor en el plano, que también construiremos en su momento y al que llamaremos "conjunto de Cantor 4 esquinas".

Tal y como se ha dicho, comenzamos con el conjunto de Cantor abstracto $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, es decir, se trata del producto cartesiano con infinitas coordenadas cuyos únicos elementos son 0 y 1. Consideramos una sucesión de números positivos y estrictamente decreciente $(a_n)_{n\geq 1}$ de forma que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Sean dos sucesiones cualesquiera $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1}$ y $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ pertenecientes a Δ. En ese caso, definimos la función distancia como sigue:

$$\begin{aligned} d : \Delta \times \Delta &\longrightarrow [0, +\infty] \\ (\omega, \varepsilon) &\longmapsto \sup_{n\geq 1} a_n |\omega_n - \varepsilon_n|. \end{aligned}$$

En efecto, vamos a demostrar que es una distancia para Δ. Para ello, comprobamos que se verifican las condiciones necesarias de la definición.

1. Se tiene que $d(\omega, \varepsilon) \geq 0$ al tratarse del supremo de un conjunto en el que solo aparecen cantidades no negativas: el producto de elementos de una sucesión positiva con el valor absoluto de una diferencia.

2. Se cumple la propiedad de simetría gracias a las propiedades del valor absoluto. En efecto,

$$d(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} a_n |\omega_n - \varepsilon_n| = \sup_{n\geq 1} a_n |\varepsilon_n - \omega_n| = d(\varepsilon, \omega).$$

3. Tenemos que $d(\omega, \varepsilon) = 0$ si, y solamente si, $\sup_{n\geq 1} a_n |\omega_n - \varepsilon_n| = 0$. Como dijimos antes, se toma supremo en un conjunto donde todos los elementos son no negativos. Por tanto, si exigimos que el supremo sea nulo, estamos pidiendo que $a_n |\omega_n - \varepsilon_n| = 0$ para todo $n \geq 1$. Como la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es de elementos positivos, lo anterior es equivalente a decir que $|\omega_n - \varepsilon_n| = 0$ para todo $n \geq 1$, es decir, $\omega_n = \varepsilon_n$ para todo $n \geq 1$ y, por tanto, $\omega = \varepsilon$.

4. Por último, sea $\eta = (\eta_n)_{n\geq 1} \in \Delta$. Se tiene que

$$d(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} a_n |\omega_n - \varepsilon_n| = \sup_{n\geq 1} a_n |\omega_n - \eta_n + \eta_n - \varepsilon_n|.$$

   Ahora bien,

$$a_n |\omega_n - \eta_n + \eta_n - \varepsilon_n| \leq a_n |\omega_n - \eta_n| + a_n |\eta_n - \varepsilon_n|, \quad \text{para todo } n \geq 1$$

gracias a la propiedad triangular del valor absoluto. Tomando supremos y utilizando sus propiedades tenemos que

$$\sup_{n\geq 1} a_n|\omega_n - \eta_n + \eta_n - \varepsilon_n| \leq \sup_{n\geq 1}(a_n|\omega_n - \eta_n| + a_n|\eta_n - \varepsilon_n|) \leq$$
$$\leq \sup_{n\geq 1} a_n|\omega_n - \eta_n| + \sup_{n\geq 1} a_n|\eta_n - \varepsilon_n| = d(\omega, \eta) + d(\eta, \varepsilon).$$

En definitiva, hemos demostrado que

$$d(\omega, \varepsilon) \leq d(\omega, \eta) + d(\eta, \varepsilon)$$

con $\omega, \varepsilon, \eta \in \Delta$.

Por tanto, tenemos que la d es una distancia en Δ pudiéndose probar además que genera la topología producto de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Nuestro objetivo ahora es calcular la medida p-dimensional de Hausdorff de Δ (siendo p, en principio, desconocido) y, además, dar el valor de su dimensión bajo unas condiciones sobre la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ que se darán a conocer más adelante.

Proposición 2.6.1. *Si consideramos la distancia asociada a $(a_k)_{k\geq 1}$ tal y como se hizo anterioremente, se tiene que para $p > 0$,*

$$\mathcal{H}^p(\Delta) = \liminf_{k\to\infty} 2^k (a_{k+1})^p = \lambda.$$

Demostración. Comenzamos probando la desigualdad

$$\mathcal{H}^p(\Delta) \leq \lambda.$$

Para ello, consideramos un recubrimiento $\{U_j\}_{j=1}^{2^k}$ de nuestro conjunto Δ, donde cada U_j está formado por todos los elementos que tienen las primeras k coordenadas iguales. Por tanto, si nuestra sucesión a considerar es la de término general a_n, se satisface que $\operatorname{diam} U_j = a_{k+1}$ para todo $j = 1, \ldots, 2^k$. Cabe señalar que estos conjuntos se definirán con más detalle para probar la desigualdad contraria. Como los valores que pueden tomar las k primeras coordenadas son 0 y 1, nos encontramos con el hecho de que el número total de conjuntos con dicho diámetro es 2^k. Por tanto, si $\delta > a_{k+1}$, todo a_{k+1}-recubrimiento es δ-recubrimiento por lo que el conjunto de recubrimientos de diámetro menor que δ es mayor que el otro. Ahora bien, como la sucesión es decreciente, fijado un $\delta > 0$ existe un valor k_0 de forma que $a_{k+1} < \delta$ para todo $k \geq k_0 = k_0(\delta)$. Al tomar ínfimo sobre dichos recubrimientos se tiene que

$$\mathcal{H}^p_\delta(\Delta) \leq \sum_{i=1}^{2^k} (\operatorname{diam} U_i)^p = 2^k (a_{k+1})^p, \qquad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Luego,

$$\mathcal{H}^p_\delta(\Delta) \leq \liminf_{k\to\infty} 2^k (a_{k+1})^p.$$

Tomando límite cuando δ tiende a 0, se llega a la desigualdad deseada

$$\mathcal{H}^p(\Delta) \leq \lambda.$$

Nos disponemos ahora a probar la desigualdad contraria. Para ello, tenemos en cuenta la siguiente propiedad, que utilizaremos más adelante: fijado $\varepsilon' > 0$, existe un k_0 de forma que

$$\lambda - \varepsilon' \leq 2^k (a_{k+1})^p, \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

y tomamos $\delta < a_{k_0}$.

Tomamos ahora un valor $k \in \mathbb{N}$ de forma que el conjunto $U \subset \Delta$ verifica la condición $\operatorname{diam} U = a_k$. Es decir, si

$$\operatorname{diam} U = \sup\{d(\alpha, \beta) \text{ tal que } \alpha, \beta \in U\}$$

siendo d la distancia que se ha definido al principio, significa que todo elemento de U tiene, al menos, las primeras $k-1$ coordenadas iguales. Si dos elementos tuvieran una de esas coordenadas distintas, la distancia entre ellos sería un tal a_j con $j < k$ que, siendo la sucesión decreciente, significaría que se trata de un valor mayor que el supremo de la hipótesis, lo que supone una contradicción. Por tanto, sean α y ε en U de forma que

$$\alpha_1 = \varepsilon_1, \cdots, \alpha_{k-1} = \varepsilon_{k-1}$$

denotando por ω al conjunto de coordenadas $\omega = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1})$. Consideramos también el conjunto V_ω definido como sigue

$$V_\omega = \{\varepsilon_1\} \times \cdots \times \{\varepsilon_{k-1}\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$$

Esto quiere decir que sus elementos son cadenas de la forma

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1} b_1 b_2 \ldots$$

con $b_i \in \{0,1\}$ para todo $i \geq 1$. Por tanto, su diámetro a_k es coincidente con nuestro primer conjunto, ya que, por ejemplo, basta para comprobarlo tomar los elementos

$$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1} 1 \ldots \text{ y } \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{k-1} 0 \ldots$$

cuya distancia es a_k. Como comparten diámetro pero este último conjunto son cadenas infinitas, se satisface que

$$U \subset V_\omega.$$

Ahora bien, si $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de Δ con conjuntos de diámetro menor o igual que a_{k_0}, existen una serie de conjuntos de coordenadas ω_i de forma que

$$U_i \subset V_{\omega_i} \quad \text{y} \quad \operatorname{diam} U_i = \operatorname{diam} V_{\omega_i}.$$

Por tanto, podemos recubrir el conjunto de partida Δ de la siguiente forma:

$$\Delta \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{\omega_i}.$$

Gracias a la compacidad de Δ y, puesto que V_{ω_i} es abierto para todo valor de i, podemos afirmar que existe un valor $N \geq 1$ de forma que

$$\Delta \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_{\omega_i},$$

o, equivalentemente, es posible obtener un recubrimiento finito por abiertos del conjunto. Por tanto, utilizando argumentos de subaditividad y recordando que $\operatorname{diam} U_i = \operatorname{diam} V_{\omega_i}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^p = \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} V_{\omega_i})^p \geq \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{diam} V_{\omega_i})^p, \tag{2.10}$$

siendo p un número no negativo cualquiera.

A continuación, en lugar de considerar todo $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, tomamos un entero positivo M de forma que sea mayor que la longitud de toda cadena de coordenadas ω_i con $i = 1, \ldots, N$. De esta forma, podemos escribir

$$\{0,1\}^M \subset \bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{V}_{\omega_i}$$

con $\widetilde{V}_{\omega_i} \subset \{0,1\}^M$, es decir, una cadena de M caracteres formados por los dígitos 0 y 1. Si exigimos que $\omega_i \in \{0,1\}^{N_i - 1}$, por la definición que hemos dado de los recubrimientos V_k, tenemos que

$$\widetilde{V}_{\omega_i} = \{\varepsilon_1\} \times \cdots \times \{\varepsilon_{N_i-1}\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\},$$

es decir, el conjunto de cadena de M caracteres formados por 0 y 1 con los primeros $N_i - 1$ fijos y los restantes $M - (N_i - 1)$ libres. Por tanto, si queremos cuantificar el número de elementos que hay en $\widetilde{V}_{\omega_i}$, podemos escribir en términos de probabilidades que

$$\mathbb{P}(\widetilde{V}_{\omega_i}) = \frac{2^{M-(N_i-1)}}{2^M} = \frac{1}{2^{N_i-1}}.$$

Con lo que llegamos a que

$$1 \leq \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(\widetilde{V}_{\omega_i}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{N_i-1}}.$$

Utilizamos ahora la hipótesis que se estableció al comienzo de este razonamiento: fijado $\varepsilon' > 0$, existe k_0 de forma que

$$\lambda - \varepsilon' \leq 2^k (a_{k+1})^p \quad \text{para todo } k \geq k_0.$$

Consecuentemente, $2^{N_i-1}(a_{N_i})^p \geq \lambda - \varepsilon'$, por lo que siguiendo las desigualdades que teníamos llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^{N_i-1}} \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{(a_{N_i})^p}{\lambda - \varepsilon'},$$

por lo que

$$\lambda - \varepsilon' \leq \sum_{i=1}^{N} (a_{N_i})^p = \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{diam} V_{\omega_i})^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^p,$$

teniéndose la última desigualdad gracias a la expresión 2.10.

Tal y como se ha hecho en otras ocasiones, tomando ínfimo en las sumas de diámetros de los recubrimientos, tenemos que para todo $\varepsilon' > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\lambda - \varepsilon' \leq \mathcal{H}^p_\delta(\Delta) \leq \mathcal{H}^p(\Delta).$$

Como el valor de ε' es arbitrario, podemos hacer que tienda a 0, de forma que obtenemos que

$$\lambda \leq \mathcal{H}^p(\Delta).$$

Finalmente, podemos concluir que

$$\mathcal{H}^p(\Delta) = \liminf_{k \to \infty} 2^k (a_{k+1})^p.$$

$\square$

Vamos a estudiar ahora un caso particular. Consideramos un número $\gamma \in (0,1)$ de forma que tomamos la sucesión de término general $a_k = \gamma^k$ para todo $k \geq 1$. Con los resultados obtenidos en la Proposición 2.6.1 podemos afirmar que

$$\mathcal{H}^p(\Delta) = \liminf_{k \to \infty} 2^k (\gamma^{k+1})^p = \liminf_{k \to \infty} (2\gamma^p)^k \gamma^p.$$

Llegados a este punto podemos distinguir varios casos en cuanto al límite que hemos obtenido. Teniendo en cuenta que para γ fijo, γ^p es una constante, todo dependerá del término que está elevado a k.

Si $2\gamma^p < 1$ se tendrá que el límite es nulo al hacer tender k a infinito, por lo que $\mathcal{H}^p(\Delta) = 0$. Por las propiedades que ya se han estudiado previamente sobre la dimensión y la medida de Hausdorff, este hecho implica que $\dim_{\mathcal{H}} \Delta \leq p$, por lo que no obtenemos ningún resultado fructífero sobre la dimensión de nuestro conjunto.

En segundo lugar, si $2\gamma^p > 1$, el límite en este caso tenderá a infinito, indicando que $\mathcal{H}^p(\Delta) = \infty$ y, por tanto, $\dim_{\mathcal{H}} \Delta \geq p$.

Por tanto, para que la dimensión del conjunto Δ sea exactamente p, no queda otra posibilidad que no sea $2\gamma^p = 1$. En ese caso,

$$\mathcal{H}^p(\Delta) = \gamma^p = \frac{1}{2}. \tag{2.11}$$

Despejando, llegamos a que $\log(\gamma^p) = \log \frac{1}{2} = -\log 2$ y, por tanto,

$$p = \dim_{\mathcal{H}} \Delta = -\frac{\log 2}{\log \gamma},$$

por lo que, de esta forma, quedan determinados los valores de la medida y dimensión de Hausdorff de Δ para la sucesión definida al principio.

Una vez que se ha hecho este estudio sobre la dimensión y la medida de Hausdorff de un conjunto en concreto, vamos a ver dos casos distintos a la hora de dar la sucesión inicial $(a_n)_{n\geq 1}$, utilizando en todo momento los datos que se han obtenido. Comenzamos con la sucesión de término general $a_n = 1/n$ y nos preguntamos por la dimensión de Δ en este caso.

Definimos las correspondientes funciones distancias siguiendo la estructura que se ofreció al principio, es decir,

$$d_1(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}|\omega_n - \varepsilon_n|$$
$$d_2(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} \gamma^n|\omega_n - \varepsilon_n|$$

siempre que $0 < \gamma < 1$.

Definimos ahora la función identidad como sigue:

$$Id : (\Delta, d_1) \longrightarrow (\Delta, d_2)$$

que se trata de una función Lipschitziana, como se comprobará a continuación. Para ello, es necesario tener en cuenta que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\gamma^n}{1/n} = 0$$

al ser $0 < \gamma < 1$, lo que significa que existe una constante positiva M_γ de forma que

$$\gamma^n \leq \frac{M_\gamma}{n} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por tanto, se tiene que

$$d_2(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} \gamma^n |\omega_n - \varepsilon_n| \leq \sup_{n\geq 1} \frac{M_\gamma}{n} |\omega_n - \varepsilon_n| = M_\gamma d_1(\omega, \varepsilon),$$

teniéndose, de esta forma, que la función Id es Lipschitziana. Aplicando el Lema 2.4.6, se tiene que

$$\dim_{\mathcal{H}}((\Delta, d_1)) \geq \dim_{\mathcal{H}}((\Delta, d_2)) = -\frac{\log 2}{\log \gamma} \quad \text{para todo } 0 < \gamma < 1.$$

Haciendo γ tender a 1, se satisface que

$$\dim_{\mathcal{H}}((\Delta, d_1)) \geq \infty$$

por lo que podemos afirmar que $\dim_{\mathcal{H}}(\Delta) = \infty$ cuando $a_n = 1/n$.

Análogamente vamos a estudiar el caso cuando la sucesión es de término general $a_n = e^{-n^2}$. Al igual que antes, consideramos las distancias

$$d_1(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} e^{-n^2} |\omega_n - \varepsilon_n|$$
$$d_2(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} \gamma^n |\omega_n - \varepsilon_n|$$

con $0 < \gamma < 1$, y definimos la función identidad de la siguiente forma:

$$Id : (\Delta, d_2) \longrightarrow (\Delta, d_1).$$

De nuevo, se trata de una aplicación Lipschitziana pero, para probarlo, nos hace falta fijarnos en el siguiente detalle:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n^2}}{\gamma^n} = 0,$$

lo que significa que existe una constante positiva M_γ de forma que $e^{-n^2} \leq M_\gamma \gamma^n$ para todo $n \geq 1$. Luego,

$$d_1(\omega, \varepsilon) = \sup_{n\geq 1} e^{-n^2} |\omega_n - \varepsilon_n| \leq \sup_{n\geq 1} M_\gamma \gamma^n |\omega_n - \varepsilon_n| = M_\gamma d_2(\omega, \varepsilon),$$

quedando probado que la función Id es Lipschitiziana.

Aplicando el Lema 2.4.6, tenemos que

$$-\frac{\log 2}{\log \gamma} = \dim_{\mathcal{H}}((\Delta, d_2)) \geq \dim_{\mathcal{H}}((\Delta, d_1)), \quad \text{para todo } 0 < \gamma < 1.$$

Tomando límite cuando γ tiende a 0^+, se tiene que $0 \geq \dim_{\mathcal{H}}((\Delta, d_1))$ pudiendo de esta forma concluir que $\dim_{\mathcal{H}}(\Delta) = 0$ cuando $a_n = e^{-n^2}$.

Tras estudiar estos ejemplos podemos afirmar que la dimensión de Hausdorff es una cantidad que depende de la métrica que se considere en cada momento y no de la topología. Todas las distancias que hemos visto generan la misma topología y, sin embargo, para todo $p \in [0, +\infty]$ existe una distancia d de forma que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Delta, d) = p. \tag{2.12}$$

A partir del desarrollo que hemos llevado acabo para conocer la dimensión del conjunto Δ dadas todas las condiciones que se enunciaron al comienzo, podemos conocer la dimensión de diferentes conjuntos de $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ con los que se suele trabajar a menudo.

El principal ejemplo de ello es el conjunto de Cantor en $\mathbb{R}$ de razón $1/3$. El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ es la intersección infinita de una serie de conjuntos C_k de forma que cada uno de ellos está formado por 2^k intervalos $C_{k,j}$ de longitud 3^{-k} para todo $k \geq 0$. De cada uno de estos intervalos $C_{k,j}$ de la etapa k-ésima nos quedamos con el primer y último tercio, obteniendo de esta forma dos nuevos intervalos de la etapa $(k+1)$-ésima. Por tanto, C_0 correspondería al intervalo $[0, 1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y así sucesivamente. En definitiva,

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} C_{k,j}.$$

donde C_k es la unión de intervalos de la etapa k-ésima y $C_{k,j}$ cada uno de esos intervalos.

Otra forma de definir el conjunto de Cantor y, además, será la que usaremos en el desarrollo de los siguientes resultados es etiquetar los intervalos mediante subíndices cuyos dígitos sean 0 y 1, de forma que las cadenas formadas por dichos dígitos indican a qué etapa del conjunto de Cantor pertenece cada intervalo. De esta forma, C_0 quedaría identificado de manera conveniente con Δ y los siguientes conjuntos lo harían como se detalla a continuación

$$\begin{gathered} C_1 = I_0 \cup I_1 \\ C_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11} \\ C_3 = I_{000} \cup I_{001} \cup I_{010} \cup I_{011} \cup I_{100} \cup I_{101} \cup I_{110} \cup I_{111} \\ \cdots \end{gathered} \tag{2.13}$$

Así, si los subíndices de una serie de intervalos coinciden hasta el dígito k significa que pertenecen al mismo intervalo de todos los que hay en la etapa k-ésima. De esta forma, el conjunto de Cantor de razón un tercio queda definido como antes:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k. \tag{2.14}$$

Vamos a justificar que podemos usar el conjunto Δ para identificarlo con el conjunto de Cantor y, de esta forma, poder calcular la medida y dimensión de Hausdorff de $\mathcal{C}$ a partir de los resultados que hemos obtenido. El desarrollo que haremos a partir de ahora será para el conjunto de Cantor generalizado en la recta real, es decir, de razón $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Al finalizar, tomaremos $\lambda = \frac{1}{3}$ para hallar explícitamente la medida y dimensión del conjunto de Cantor que se ha definido arriba. El conjunto de Cantor generalizado, al que vamos a denotar por $\mathcal{C}(\lambda)$, queda definido como se explica a continuación.

Sea $0 < \lambda < 1/2$. Denotamos por $C_{0,1}$ al intervalo de la recta real $[0, 1]$ y llamamos $C_{1,1}$ e $C_{1,2}$ a los intervalos $[0, \lambda]$ y $[1 - \lambda, 1]$, respectivamente. Continuamos este proceso seleccionando, de cada subintervalo obtenido, un intervalo nuevo. Así, si hemos definido los intervalos $C_{k-1,1}, \dots, C_{k-1,2^{k-1}}$, definimos los de la siguiente etapa, $C_{k,1}, \dots, C_{k,2^k}$ eliminando un intervalo situado en la mitad de cada $C_{k-1,j}$ de longitud $(1-2\lambda)\operatorname{diam}(C_{k-1,j}) = (1-2\lambda)\lambda^{k-1}$. Los intervalos obtenidos en la nueva etapa tienen longitud exactamente λ^k. Finalmente, definimos el conjunto de Cantor generalizado, $C(\lambda)$ para la recta real como

$$C(\lambda) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^k} C_{k,j}. \tag{2.15}$$

Al igual que antes, podemos definir el conjunto de Cantor generalizado utilizando subíndices de cadenas de 0 y 1. El caso particular del conjunto de Cantor de razón $\frac{1}{3}$ corresponde a $C(\frac{1}{3})$.

Comenzamos ya con el problema que planteamos anteriormente. Tal y como se ha indicado en varias ocasiones, tomamos $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, y consideramos el espacio métrico $\Delta_\lambda = (\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d_\lambda)$, siendo d_λ la distancia definida como

$$d_\lambda(\omega, \varepsilon) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda^k |\varepsilon_k - \omega_k|.$$

En el desarrollo inicial ya se probó que la función anterior era, en efecto, una distancia.

A continuación, usando una nomenclatura análoga a la de las expresiones 2.13, podemos renombrar los intervalos $C_{k,j}$ con $j = 1, \dots, 2^k$, como I_ω con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{0, 1\}^k$. Es decir,

$$\{C_{k,j}\}_{j=1}^{2^k} = \{I_\omega : \omega \in \{0, 1\}^{2^k}\} \tag{2.16}$$

para cada $k \geq 0$. Además, $I_{\omega 0}$ e $I_{\omega 1}$ serían los intervalos cerrados que permanecen al quitar a I_ω un intervalo abierto en el centro de longitud $(1-2\lambda)\operatorname{long}(I_\omega)$, siendo λ la razón del conjunto de Cantor que estemos estudiando en cada caso.

Consideramos ahora la función φ definida como sigue

$$\varphi : \Delta_\lambda \to \mathcal{C}(\lambda)$$

de forma que

$$\{\varphi(\omega)\} = \{\varphi((\omega_k)_{k=1}^{\infty})\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} \quad \text{para todo } \omega \in \Delta.$$

Es necesario puntualizar que la intersección que aparece en la definición corresponde a un solo punto. ya que $\operatorname{long}(I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}) = \lambda^n$ y, este número se trata de una cantidad que tiende a 0 al hacer tender n a $+\infty$. Además, la función que hemos definido es sobreyectiva. Si tomamos un intervalo de la etapa k-ésima del conjunto de Cantor, sabemos que comparte las $k-1$ primeras coordenadas con las que está identificado con el intervalo al que pertenece de todos los que hay en la etapa anterior. Para llegar a este intervalo de la etapa k, añadimos a la cadena del anterior un 0 ó un 1. Por tanto, a un intervalo cualquiera del Cantor le hemos hecho corresponder una cadena de Δ, probando así que φ es sobreyectiva.

Vamos a comprobar que la función definida y su inversa son Lipschitzianas, de forma que podremos utilizar los resultados que ya hemos demostrado anteriormente sobre medida y dimensión de Hausdorff para Δ_λ.

En primer lugar, consideramos $\omega = (\omega_j)_{j=1}^{\infty}$ y $\eta = (\eta_j)_{j=1}^{\infty}$ de forma que $d_\lambda(\omega, \eta) = \lambda^k$. Esto quiere decir que $\omega_k \neq \eta_k$ y que $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Por tanto, como $\varphi(\omega)$ y $\varphi(\eta)$ pertenecen a $I_{w_1\ldots w_{k-1}}$ se tiene que

$$|\varphi(\omega) - \varphi(\eta)| \leq \lambda^{k-1} = \frac{1}{\lambda}\lambda^k = \frac{1}{\lambda} d_\lambda(\omega, \eta), \tag{2.17}$$

demostrando así que φ es una función Lipschitziana de constante $\frac{1}{\lambda}$.

Estudiemos ahora su inversa. Para ello, comenzamos con la hipótesis que teníamos anteriormente: $\omega_k \neq \eta_k$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\omega_k = 0$ y $\eta_k = 1$, de forma que

$$\varphi(\omega) \in I_{\omega_1\ldots\omega_{k-1}0} \quad \text{y} \quad \varphi(\eta) \in I_{\omega_1\ldots\omega_{k-1}1}.$$

Se trata de dos intervalos cuya distancia entre ellos es mayor que $\lambda^{k-1}(1-2\lambda)$. De esta forma, se tiene que

$$|\varphi(\omega) - \varphi(\eta)| \geq \lambda^{k-1}(1-2\lambda) = \frac{1-2\lambda}{\lambda} d_\lambda(\omega, \eta). \tag{2.18}$$

Como nuestra función es biyectiva, podemos afirmar que φ^{-1} es Lipschitziana de constante $\frac{\lambda}{1-2\lambda}$.

Ya tenemos todas las herramientas necesarias para poder acotar la medida α-dimensional de Hausdorff del conjunto de Cantor generalizado $C(\lambda)$.

Para buscar una cota superior de la medida tenemos en cuenta la desigualdad 2.17. Elevando ambos términos a α y aplicando la definición de medida de Hausdorff llegamos a

$$\mathcal{H}^\alpha(C(\lambda)) \leq \frac{1}{\lambda^\alpha}\mathcal{H}^\alpha(\Delta_\lambda).$$

Como conocemos el valor de $\mathcal{H}^\alpha(\Delta_\lambda)$, sabemos que

$$\mathcal{H}^\alpha(C(\lambda)) \leq \frac{1}{\lambda^\alpha} \liminf_{k\to\infty}(2\lambda^\alpha)^k\lambda^\alpha.$$

Ahora bien, para que la dimensión de $C(\lambda)$ sea exactamente α, su medida debe ser positiva y finita. De esta forma, si $2\lambda^\alpha > 1$, obtenemos que la medida es mayor o igual que infinito, de forma que no encontramos ninguna información novedosa. Por otra parte, si $2\lambda^\alpha < 1$, el límite se va a 0, de manera que nuestra medida sería también nula para esa dimensión, contradiciendo a lo que acabábamos de decir. Por tanto, debe ser $2\lambda^\alpha = 1$. De esta forma, se obtiene la cota superior

$$\mathcal{H}^\alpha(C(\lambda)) \leq 1.$$

Para la cota inferior utilizamos la desigualdad 2.18. A partir de ella, construimos la definición de medida α-dimensional de Hausdorff, de forma que obtenemos

$$\mathcal{H}^\alpha(C(\lambda)) \geq \left(\frac{1-2\lambda}{\lambda}\right)^\alpha \mathcal{H}^\alpha(\Delta_\lambda) = \left(\frac{1-2\lambda}{\lambda}\right)^\alpha \liminf_{k\to\infty}(2\lambda^\alpha)^k\lambda^\alpha.$$

Razonando de forma análoga al caso anterior, para que la medida del conjunto de Cantor generalizado sea exactamente α, debe ser $2\lambda^\alpha = 1$. De esta forma, la cota que obtenemos para la medida es

$$\mathcal{H}^\alpha(C(\lambda)) \geq (1-2\lambda)^\alpha.$$

Gracias a los resultados obtenidos podemos enunciar el siguiente Teorema.

Teorema 2.6.2. *Sea el conjunto $C(\lambda)$ definido anteriormente para $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Entonces, su dimensión de Hausdorff es*

$$\alpha = -\frac{\log 2}{\log \lambda}.$$

Además, para esa dimensión α se tiene que

$$(1-2\lambda)^\alpha \leq \mathcal{H}^\alpha(C(\lambda)) \leq 1.$$

Demostración. Las desigualdades en la que está implicada la medida α-dimensional han sido probadas en el desarrollo previo al enunciado del Teorema.

El cálculo de la dimensión es consecuencia de uno de los pasos que realizamos anteriormente. Para ambas cotas, fue necesario imponer que $2\lambda^\alpha = 1$ para que la medida fuera exactamente α. Despejando de dicha expresión se obtiene que

$$\alpha = -\frac{\log 2}{\log \lambda},$$

como se quería probar. $\square$

De este resultado genérico para el conjunto $C(\lambda)$ se sigue a modo de corolario las acotaciones para la medida de Hausdorff del conjunto de Cantor $\mathcal{C} = C(\frac{1}{3})$.

Corolario 2.6.3. *El conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ descrito anteriormente satisface que*

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{C}) \leq 1, \tag{2.19}$$

para $\alpha = -\frac{\log 2}{\log 3}$, que es su dimensión de Hausdorff.

Demostración. Para verificar los datos del enunciado basta sustituir por los valores adecuados en las expresiones del Teorema 2.6.2.

En primer lugar, como $\lambda = \frac{1}{3}$ en este caso, tenemos que

$$\alpha = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 2}{\log 3.}$$

Por otra parte, si sustituimos en la cadena de desigualdades para la medida tenemos que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}} \leq \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{C}) \leq 1. \tag{2.20}$$

Llevando a cabo unos sencillos cálculos se llega a las cotas deseadas

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^\alpha(\mathcal{C}) \leq 1.$$

$\square$

A continuación vamos a estudiar otro conjunto cuya construcción guarda cierta relación con el anterior. Se trata del conjunto de Cantor del plano de razón $\frac{1}{4}$, al que llamaremos “conjunto de Cantor 4 esquinas”. La construcción de dicho conjunto se desarrolla como sigue.

Sea S_0 el producto cartesiano del intervalo $[0,1]$ en el eje OX con él mismo en el eje OY, es decir,

$$S_0 = [0,1] \times [0,1].$$

De este cuadrado unidad, nos vamos a quedar con los cuatro cuadrados de las esquinas de longitud, cada uno de ellos, igual a $\frac{1}{4}$, de forma que eliminamos todo el espacio restante. En esta nueva etapa, S_1, contamos con 4 cuadrados de lado $\frac{1}{4}$ y situados en las esquinas del cuadrado inicial, a los que denotaremos como $S_{1,j}$ con $j = 1, \ldots, 4$. El siguiente paso consistirá en llevar a cabo la misma operación pero en cada uno de los cuatro cuadrados de S_1. De esta forma, obtenemos $4^2 = 16$ cuadrados de lado con longitud $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ de forma que, cada cuatro de ellos están situados en las cuatro esquinas de los cuadrados de la etapa anterior. Reiterando el proceso, llegamos a una etapa S_k constituida por 4^k cuadrados de lado con longitud 4^{-k}. A estos cuadrados los denotaremos como $S_{k,j}$ con $j = 1, \ldots, 4^k$. Intersecando todas las etapas S_k, con $k \geq 0$, obtenemos el conjunto de Cantor 4 esquinas, quedando definido de la siguiente forma:

$$\mathcal{S} = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{4^k} S_{k,j}. \tag{2.21}$$

Al igual que se hizo con el conjunto de Cantor en la recta real, podemos definir este conjunto utilizando una notación que será mucho más cómoda a la hora de trabajar con él más adelante. Para ello, comenzamos definiendo $\widetilde{\Delta} = \{0,1,2,3\}^{\mathbb{N}}$, es decir, sucesiones cuyos elementos son $0, 1, 2$ y 3. Tomamos como S_0 el conjunto $\widetilde{\Delta}$. Ahora bien, S_1 era la unión de cuatro cuadrados que se situaban en las esquinas siendo la longitud de cada uno de ellos igual a $1/4$. A este conjunto lo denotaremos como sigue:

$$S_1 = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3$$

siendo, por ejemplo, I_0 el cuadrado inferior izquierdo y numerando el resto a partir de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj. Cada uno de ellos da lugar en la siguiente etapa a otros cuatro cuadrados en las esquinas cuyos lados tienen longitud $1/16$. En total, nos encontramos con 16 cuadrados de estas características. A esta etapa la denotaremos como sigue:

$$S_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{02} \cup I_{03} \cup I_{10} \cup \cdots \cup I_{32} \cup I_{33}.$$

De esta forma, el conjunto de Cantor 4 esquinas queda definido como

$$S = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$$

pues lo único que hemos cambiado es la notación.

Una vez expuesto dicho conjunto, vamos a hacer un breve estudio sobre su medida de Hausdorff.

Comenzamos definiendo la función distancia d de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d : \widetilde{\Delta} \times \widetilde{\Delta} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ (\omega, \varepsilon) &\longmapsto \sup_{n \geq 1} a_n \operatorname{dist}(\omega_n, \varepsilon_n). \end{aligned}$$

siendo $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números positivos y estrictamente decreciente de forma que su límite en el ∞ es igual a 0, y $w = (w_n)_{n\geq 1}, \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones cualesquiera pertenecientes a $\widetilde{\Delta}$. Definimos $\operatorname{dist}(\omega_n, \varepsilon_n)$ como

$$\operatorname{dist}(\omega_n, \varepsilon_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n \neq \varepsilon_n \\ 0 & \text{si } \omega_n = \varepsilon_n \end{cases}$$

que se puede comprobar fácilmente que se trata de una distancia.

Al igual que en el conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, podemos probar que la distancia definida d es, en efecto, una distancia y, siguiendo las mismas pautas que en la ocasión anterior se puede probar el siguiente resultado, del que solo daremos su enunciado para utilizarlo más adelante.

Proposición 2.6.4. *Si consideramos la distancia d asociada a $(a_k)_{k\geq 1}$ tal y como ha explicado anteriormente, se tiene para $p > 0$,*

$$\mathcal{H}^p(\widetilde{\Delta}) = \liminf_{k\to\infty} 4^k (a_{k+1})^p.$$

Ahora bien, considerando un número $\gamma \in (0,1)$ de forma que tomamos la sucesión de término general $a_k = \gamma^k$ para todo $k \geq 1$, tenemos gracias al resultado anterior que

$$\mathcal{H}^p(\widetilde{\Delta}) = \liminf_{k\to\infty} 4^k (\gamma^{k+1})^p = \liminf_{k\to\infty} (4\gamma^p)^k \gamma^p.$$

Razonando como en el caso ya estudiado, se tiene que la dimensión del conjunto $\widetilde{\Delta}$ ha de ser

$$p = \dim_{\mathcal{H}} \widetilde{\Delta} = -\frac{\log 4}{\log \gamma}.$$

Para ello, basta estudiar los casos posibles en los que la medida no vale ni 0 ni ∞, es decir, aquellos en los que la medida es positiva y finita, lo que nos permite determinar la dimensión exacta de $\widetilde{\Delta}$.

A partir de ahora fijamos $\gamma = 1/4$, de forma que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\widetilde{\Delta}) = 1. \tag{2.22}$$

Definimos la función φ de la siguiente forma

$$\varphi : \widetilde{\Delta} \longrightarrow S$$

de manera que para $\omega = (\omega_k)_{k\geq 1} \in \widetilde{\Delta}$ se tiene que

$$\{\varphi(\omega)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}.$$

Es necesario puntualizar que la función definida es sobreyectiva. Para ello, basta ver que cualquier punto de la imagen, es decir, cualquier punto del Cantor cuatro esquinas proviene de alguna cadena de $\widetilde{\Delta}$. Esto es cierto, pues sabemos que cualquier cuadrado de la etapa k-ésima comparte los $(k-1)$ primeros caracteres de la cadena con el cuadrado de la etapa anterior al que pertenece. El último elemento de dicha cadena es un número entre $0, 1, 2$ y 3 que depende de su posición dentro del cuadrado anterior. En definitiva, a dicho cuadrado le corresponde una cadena de $\widetilde{\Delta}$.

A continuación vamos a ver que la función definida arriba es Lipschitziana en ambos sentidos, es decir, ella y su inversa, lo que supondrá el paso previo a determinar una cota para la medida 1-dimensional del conjunto.

Tenemos, en primer lugar, que para todo ω y ε pertenecientes a $\widetilde{\Delta}$ con $\omega_{k+1} \neq \varepsilon_{k+1}$ y $\omega_j = \varepsilon_j$ para todo $j = 1, \ldots, k$, se tiene que

$$|\varphi(\omega) - \varphi(\varepsilon)| \leq \sqrt{2} \cdot 4^{-k} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 4^{-k-1} = 4\sqrt{2} d(\omega, \varepsilon),$$

de forma que φ es una función Lipschitziana de constante $4\sqrt{2}$.

Ahora bien, construyendo la medida α- dimensional de Hausdorff a partir de lo obtenido anteriormente, tenemos que

$$\mathcal{H}^{\alpha}(S) \leq 4\sqrt{2}\mathcal{H}^{\alpha}(\widetilde{\Delta}) = 4\sqrt{2} \liminf_{k\to\infty} (4\gamma^{\alpha})^k \gamma^{\alpha}. \tag{2.23}$$

Como se razonó anteriormente, es necesario para que α sea exactamente la dimensión de Hausdorff de nuestro conjunto S que $4\gamma^{\alpha} = 1$. En ese caso,

$$\alpha = -\frac{\log 4}{\log \gamma}.$$

Ya indicamos anteriormente que, como S está definido para la razón $\gamma = \frac{1}{4}$, tenemos que su dimensión es $\alpha = 1$, por lo que estamos calculando la medida de Hausdorff de S

para dicha dimensión.

A partir de la desigualdad 2.23 y junto a todos los datos anteriores tenemos que

$$\mathcal{H}^1(S) \leq \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}.$$

Para la cota inferior, comprobaremos que la función inversa de φ es también Lipschitziana. De hecho, para todo $\omega, \varepsilon \in \widetilde{\Delta}$ con $\omega_{k+1} \neq \varepsilon_{k+1}$ y $\omega_j = \varepsilon_j$ para todo $j = 1, \ldots, k$, se tiene que

$$|\varphi(\omega) - \varphi(\varepsilon)| \geq \frac{1}{2}4^{-k} = 2 \cdot 4^{-k-1} = 2d(\omega, \varepsilon).$$

Esto quiere decir que la función φ^{-1} es Lipschitziana de constante $\frac{1}{2}$.

A partir de la desigualdad anterior, construimos la definición de medida 1-dimensional de Hausdorff de forma que tenemos

$$\mathcal{H}^1(S) \geq 2\mathcal{H}^1(\widetilde{\Delta}) = 2 \liminf_{k\to\infty} (4\gamma)^k \gamma.$$

Sabiendo que $\gamma = \frac{1}{4}$ llegamos a

$$\mathcal{H}^1(S) \geq 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Con todo esto podemos enunciar el siguiente resultado, con el que concluimos la exposición de ejemplos de este tema sobre medidas y dimensión de Hausdorff.

Teorema 2.6.5. *Sea el conjunto de Cantor cuatro esquinas S descrito anteriormente. Entonces, su dimensión de Hausdorff es $\alpha = 1$ y, además, se cumple que*

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^1(S) \leq \sqrt{2}.$$

Capítulo 3

Longitud y Capacidad Analítica.

3.1. Introducción.

En capítulos anteriores hemos estudiado los conceptos fundamentales de la capacidad analítica así como la construcción de la medida de Hausdorff, de forma que el paso natural que se puede seguir de todo ello es dar una serie de resultados en el que estén involucrados ambos temas a la vez. Precisamente, ese será nuestro objetivo en este nuevo capítulo.

El primer resultado que vamos a tratar es el Teorema de Painlevé, en el que se demuestra que todo compacto del plano con longitud nula (equivalentemente, medida 1-dimensional de Hausdorff igual a 0) posee capacidad analítica cero y, por tanto, es evitable. Justo después estudiaremos otro resultado en el que se vuelven a conjugar los conceptos de capacidad analítica y medida 1-dimensional de Hausdorff mediante una serie de desigualdades.

El objetivo principal de la segunda parte del capítulo será exponer un contraejemplo para refutar la implicación contraria a la que enuncia el Teorema de Painlevé. Con ello, probaremos que la condición de que la capacidad analítica del compacto sea 0 es necesaria para que la longitud sea también nula, pero no suficiente. En particular, nuestro ejemplo estudiará el caso de un conjunto que tiene capacidad analítica nula pero, sin embargo, su longitud o medida 1-dimensional de Hausdorff es estrictamente positiva.

3.2. El Teorema de Painlevé

El primer resultado que vamos a estudiar es el Teorema de Painlevé. El concepto de capacidad analítica nace en torno a 1947 de la mano de Ahlfors gracias a la inquietud que tenía por el estudio del problema de Painlevé. Dicho problema consiste en caracterizar conjuntos evitables para funciones analíticas y acotadas, ya sea en términos métricos o geométricos. Ahlfors probó que un conjunto compacto del plano es evitable si y solamente si su capacidad analítica es nula, tal y como se estudió en el capítulo anterior. El problema es que esta caracterización no tiene carácter métrico ni geométrico, por lo que la solución del problema planteado quedaba aún lejos de ser encontrada.

En primer lugar, dado un espacio métrico (M, d) y un subconjunto $E \subset M$, recordamos que la medida de Hausdorff α-dimensional $\mathcal{H}^\alpha_\infty$ se definía como la medida de Hausdorff convencional pero sin exigirle ninguna condición a los diámetros de los recubrimientos de E. Es posible leer este concepto con más detalle en la Definición 2.3.3.

A continuación enunciaremos y demostraremos un lema que será necesario a lo largo de la prueba del resultado central de esta sección: el Teorema de Painlevé.

Lema 3.2.1. *Sea $\{Q_j\}_{j=1}^N$ una familia finita de cubos abiertos con vértices racionales. Llamos r_j a la longitud del lado de Q_j y sea Ω el siguiente conjunto*

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j. \tag{3.1}$$

Entonces, existe un ciclo Ω en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ verificando lo siguiente:

1. $\Gamma^* \subset \partial\Omega$.
2. $\mathrm{Ind}_\Gamma(w) = 1$ *para todo* $w \in \Omega$.
3. $\mathrm{long}(\Gamma) \leq 4 \sum_{j=1}^N r_j$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos un número $\eta > 0$ de forma que $8N\eta < \varepsilon$, siendo N el número de cubos abiertos cuya unión constituye Ω, tal y como se indica en el enunciado. Cubrimos el plano con una cuadrícula de cuadrados cerrados cuyos lados tienen longitud η de forma que sus interiores no se intersecan unos con otros.

Sea ahora R_j el menor rectángulo cuyo interior contiene a Q_j. La longitud del lado de dicho rectángulo está acotado superiormente por r_j más el doble de la cantidad η, ya que puede darse que cada vértice de Q_j se encuentre en el interior de algunos de los cuadrados de lado η que conforman la cuadrícula. Por tanto, el perímetro de R_j es, como mucho, $4(r_j + 2\eta)$. Consideramos también aquellos cuadrados de nuestra cuadrícula que descansan en la unión de todos los R_j, es decir, $U_1, \ldots, U_M$ contenidos en $R_1 \cup \cdots \cup R_N$. Cada cuadrado Q_m tiene cuatro intervalos acotados en su frontera. Damos una orientación o sentido a cada intervalo de forma que la orientación de la frontera del cuadrado Q_m sigue el sentido opuesto a las agujas del reloj. Por último, consideramos Σ como la colección de los $4M$ intervalos orientados resultantes de la construcción anterior.

Nuestro siguiente objetivo es la construcción del ciclo Ω. En primer lugar, tenemos que Σ es una familia equilibrada de intervalos orientados, es decir, para todo punto del plano p, el número de intervalos de Σ que tienen a p como punto inicial es el mismo número de intervalos de dicha familia que tienen a p como punto de llegada. A continuación, eliminamos de Σ aquellos intervalos que se encuentren en la familia con una orientación y la opuesta. A la familia obtenida la denotamos por Φ. La nueva familia es también equilibrada y cada intervalo de Φ está contenido en la frontera de algún R_j. Siguiendo las siguientes instrucciones vamos a construir el ciclo Γ. Tomamos cualquier curva $\gamma_1 \in \Sigma$. Como nuestra familia de intervalos es equilibrada, existe otra curva $\gamma_2 \in \Phi \setminus \{\gamma_1\}$ cuyo punto inicial corresponde al punto final de γ_2. Análogamente, utilizando de nuevo la propiedad de que Σ es equilibrada, existe una curva $\gamma_3 \in \Phi \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ de forma que su punto inicial coincide con el punto final de γ_2. Continuamos con este razonamiento hasta encontrar una curva γ_k cuyo punto final coincida con el punto inicial de γ_1. Tenemos la garantía de que eso debe ocurrir debido a que la familia Φ es equilibrada y finita. Por tanto, los intervalos $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ forman una curva cerrada. La familia restante, $\Phi \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$, sigue siendo equilibrada por lo que, si es no vacía, podemos repetir el procedimiento que hemos llevado a cabo hasta ahora. Cuando lleguemos a que la familia resultante es vacía, podemos observar que los intervalos de Φ constituyen una cadena de curvas cerradas, es decir, un ciclo Γ. Vamos a comprobar ahora que se verifican las propiedades de Γ enumeradas en el enunciado del lema.

En primer lugar, si el lado de algún U_m interseca a Ω, debe ser común a dos cubos U_m y $U_{m'}$ adyacentes, ya que Ω es un subconjunto del interior de $\bigcup_{m=1}^{M} U_m$. Por tanto, Σ contiene a los dos intervalos cuya orientación es opuesta y, en consecuencia, esos mismos intervalos ya no pertenecen a Φ. Con esto podemos concluir que Γ es un ciclo en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

En segundo lugar, vamos a acotar la longitud de Γ. Esta cantidad está acotada superiormente por la suma de los perímetros de los rectángulos R_n. Por tanto, se tiene que

$$\operatorname{long}(\Gamma) \leq \sum_{j=1}^{N} 4(r_j + 2\eta) = 4\sum_{j=1}^{N} r_j + 4N\eta \leq 4\sum_{j=1}^{N} r_j + \varepsilon, \tag{3.2}$$

debiéndose la última desigualdad a una de las hipótesis iniciales. Como el valor de ε era arbitrario, hacemos que tienda a 0 y conseguimos la expresión deseada

$$\operatorname{long}(\Gamma) \leq 4\sum_{j=1}^{N} r_j. \tag{3.3}$$

Por último, para cualquier $z \in \Omega$ que no se encuentre en la frontera de ningún U_m, el índice de z respecto a Γ es la suma de los índices de z respecto a la frontera de cada uno de los Q_m, cuyo valor es 1. Esto sumado al hecho de que el índice es constante en cada componente de Ω dan por probado el último punto del enunciado y, con ello, el lema. $\square$

Nos disponemos a enunciar y demostrar el resultado del que se viene hablando desde el comienzo del capítulo.

Teorema 3.2.2 (Teorema de Painlevé)**.** *Sea E un conjunto compacto cualquiera del plano complejo. Entonces se tiene que*

$$\gamma(E) \leq \frac{2}{\pi}\mathcal{H}^1_\infty(E).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, vamos a recubrir E con una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ de forma que se cumpla que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} A_i \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) + \varepsilon. \tag{3.4}$$

A continuación, cada elemento A_i del recubrimiento puede ser sustituido por un cubo abierto Q_i de vértices con coordenadas racionales de forma que, si es necesario, la longitud de su lado, r_i, sea ligeramente mayor que el diam A_i. Por ejemplo, podemos exigir que se cumpla

$$r_i \leq \operatorname{diam} A_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \qquad \text{para todo } i \geq 1.$$

Con todo esto tenemos que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i.$$

Como nuestro conjunto es compacto, podemos extraer un recubrimiento finito por cubos $\{Q_i\}_{i=1}^N$. Razonando con todo lo que tenemos llegamos a que

$$\sum_{i=1}^{N} r_i \leq \sum_{i=1}^{N} \operatorname{diam} A_i + \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{diam} A_i + \varepsilon(1 - \frac{1}{2^N}) \leq \sum_{i=1}^{N} \operatorname{diam} A_i + \varepsilon \leq \mathcal{H}^1_\infty(E) + 2\varepsilon.$$

Consideramos ahora $\Omega = \bigcup_{j=1}^N Q_j$ y la curva Γ que nos proporciona el Lema 3.2.1. Tenemos que Γ está definida en $\mathbb{C} \setminus E$ y, además, gracias al mismo lema podemos asegurar que $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 1$ para todo $w \in E$. Si tomamos como f la función de Ahlfors de E, es decir, aquella función admisible para E en la que se alcanza el valor de la capacidad analítica tenemos que

$$|f'(\infty)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |f(z)||dz| \leq \frac{1}{2\pi}\operatorname{long}(\Gamma) \leq \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N} r_i \leq \frac{2}{\pi}(\mathcal{H}^1_\infty(E) + 2\varepsilon).$$

Cabe señalar que en la desigualdad segunda se ha utilizado que f es una función admisible, por lo que su modulo está acotado por la unidad. Además, en la tercera se utiliza que

$$\operatorname{long}(\Gamma) \leq 4\sum_{i=1}^{N} r_i,$$

pues se trata de una propiedad que conocemos gracias al Lema 3.2.1.

Como la expresión obtenida anteriormente es válida para todo $\varepsilon > 0$, haciendo tender este valor a 0 y obtenemos que

$$\gamma(E) = |f'(\infty)| \leq \frac{2}{\pi}\mathcal{H}^1_\infty(E),$$

como se quería probar. □

Estudiando el resultado que hemos obtenido es casi inmediato darse cuenta de una consecuencia directa: si $\mathcal{H}^1_\infty(E) = 0$ se tiene que $\gamma(E) = 0$. Como la medida $\mathcal{H}^1_\infty(E)$ no impone ninguna condición sobre el diámetro de los recubrimientos de E, se tendrá que

$$\mathcal{H}^1_\infty(E) \leq \mathcal{H}^1_\delta(E)$$

para todo $\delta > 0$, puesto que al poseer una mayor libertad para escoger dichos recubrimientos, el conjunto es mayor y, por tanto, el valor del ínfimo puede disminuir. Tomando límite cuando δ tiende a 0 también sigue siendo cierta la desigualdad anterior. Por tanto, para culminar este razonamiento, enunciamos el siguiente Corolario.

Corolario 3.2.3. *Si $\mathcal{H}^1(E) = 0$, entonces E es evitable.*

En [Tol, p. 30] se encuentra la referencia de la obra en la que se ofrece una cota mejor de la que nosotros hemos obtenido. Se tiene que

$$\gamma(E) \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1_\infty(E).$$

para todo compacto $E \subset \mathbb{C}$. Tomando el conjunto E como una bola puede ser que esta cota sea óptima, es decir, que no se pueda mejorar.

Además, para subconjuntos de la recta real cabe señalar que las medidas $\mathcal{H}^1$ y $\mathcal{H}^1_\infty$ coinciden, por lo que es posible obtener una información más precisa, en concreto

$$\gamma(E) = \frac{1}{4}\mathcal{H}^1(E) \quad \text{si } E \subset \mathbb{R}.$$

Dicha igualdad se debe a C. Pommerenke, pudiéndose encontrar su prueba en la referencia [135] de [Tol]. A continuación vamos a exponer y demostrar otra estimación en la que se encuentran implicadas la medida de Hausdorff 1-dimensional y la capacidad analítica, aunque se trata de un resultado más débil que el de Pommerenke.

Proposición 3.2.4. *Sea $E \subset \mathbb{C}$ un compacto contenido en $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\frac{1}{4}\mathcal{H}^1(E) \leq \gamma(E) \leq \frac{1}{\pi}\mathcal{H}^1(E).$$

Demostración. Comenzamos demostrando la segunda desigualdad.

Sea $\varepsilon > 0$. Gracias a la regularidad exterior de la capacidad analítica y a la compacidad de nuestro conjunto de partida, podemos suponer que E está incluido en una colección finita de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, $\{I_j\}_{j=1}^N$, de forma que se verifica

$$\sum_{j=1}^{N} |I_j| < \mathcal{H}^1(E) + \varepsilon.$$

De esta forma, podemos construir una curva Γ o una familia de ellas, de forma que Γ^* rodee al compacto E y se verifique que

$$\operatorname{long}(\Gamma) \leq 2\mathcal{H}^1(E) + 2\varepsilon.$$

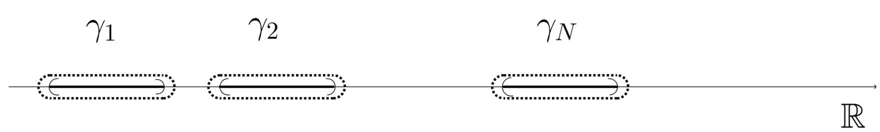

Figura 3.1: Intervalos y construcción de $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \gamma_N$.

Razonando como en el Teorema 3.2.2 y tomando f como función admisible para el compacto, tenemos que

$$|f'(\infty)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\operatorname{long}(\Gamma) \leq \frac{1}{\pi}(\mathcal{H}^1_\infty + \varepsilon).$$

Como el resultado es cierto para cualquier valor de $\varepsilon > 0$, hacemos que tienda a 0. Igualmente, tomamos supremo entre todas las funciones admisibles para E y conseguimos la desigualdad

$$\gamma(E) \leq \frac{1}{\pi}\mathcal{H}^1_\infty(E).$$

Nos disponemos ahora a probar la primera desigualdad del enunciado. Para ello, consideramos la medida $\mathcal{H}^1$ y, a partir de ella, definimos la función

$$f(z) = \mathcal{C}(\mathcal{H}^1\lfloor E)(z) = \frac{1}{2}\int_E \frac{1}{w-z}d\mathcal{H}^1(w) = \frac{1}{2}\int_E \frac{1}{t-z}dt.$$

En concreto, a esta función de le denomina transformada de Cauchy para la medida finita $\mathcal{H}^1$ restringida a E pero su estudio se llevará a cabo en capítulos posteriores a este. Observamos que si $z = x+iy \notin E$, se tiene que

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2}\int_E \operatorname{Im}\frac{1}{t-z}dt = \frac{1}{2}\int_E \frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt.$$

Cabe señalar que como se ha dicho en diversas ocasiones, la medida de Hausdorff de dimensión 1 coincide con la medida de Lebesgue de la misma dimensión, por lo que $d\mathcal{H}^1(t) = dt$. En cualquier caso, de las igualdades obtenidas se sabe que $\operatorname{Im} f(z) = 0$ si $y = 0$. Por otra parte,

$$|\operatorname{Im} f(z)| < \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|}{t^2+y^2}d\mathcal{H}^1(t) = \frac{1}{2}(\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty)) = \frac{\pi}{2}.$$

Con esto hemos probado que f es una aplicación de $\mathbb{C}\setminus E$ en la banda definida por los puntos que satisfacen $|\operatorname{Im} f(z)| < \frac{\pi}{2}$. Cabe señalar que en el Teorema 4.1.1 probaremos que la función f es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus E$.

Por otra parte, consideramos ahora la función

$$\varphi(z) = \frac{e^z-1}{e^z+1},$$

que se trata de una aplicación conforme que va de la región $|\operatorname{Im} f(z)| < \frac{1}{2}$ en el disco unidad. Por tanto, la composición $g = \varphi\circ f$ verifica que en módulo es menor que 1, ya que lleva puntos en el disco unidad, y es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus E$ por composición. Luego, se trata de una función admisible para E. Además, como $g(\infty) = \varphi(f(\infty)) = \varphi(0) = 0$, tenemos que

$$\gamma(E) \geq |g'(\infty)| = \lim_{z\to\infty}|zg(z)| = \lim_{z\to\infty}|z\varphi(f(z))| = \lim_{z\to\infty}|zf(z)|\left|\frac{\varphi(f(z))}{f(z)}\right| = |f'(\infty)\varphi'(0)|.$$

En la última igualdad hemos utilizado dos cosas que conocemos. En primer lugar, la definición de derivada de f en el ∞ y, por otra parte, como $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) = 0$,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(f(z))}{f(z)} = \lim_{w\to 0} \frac{\varphi(w)}{w} = \varphi'(0)$$

por la propia definición de derivada de una función en un punto. Por tanto, tomando valor absoluto, tenemos que

$$\left| \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(f(z))}{f(z)} \right| = |\varphi'(0)|.$$

Por último, tenemos también que $\varphi'(0) = 1/2$ y $f'(\infty) = -\mathcal{H}^1(E)/2$, debiéndose esto último a lo siguiente:

$$\begin{aligned} f'(\infty) &= \lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{2} \int_E \frac{dt}{t-z} = \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2} \int_E \frac{z}{t-z} dz = \frac{1}{2} \int_E \lim_{z\to\infty} \frac{z}{t-z} dt = -\frac{\mathcal{H}^1(E)}{2}. \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el Teorema de la Convergencia Dominada para poder intercambiar el límite con la integral.

Por último, si sustituimos en las desigualdades obtenidas llegamos a

$$\gamma(E) \geq \frac{\mathcal{H}^1(E)}{4}.$$

Con esto quedan probadas las dos desigualdades y, por tanto, la proposición. $\square$

3.3. El Ejemplo.

Vamos a comenzar repasando diversos conceptos que se han visto hasta ahora pero que conviene, en todo momento, tener presentes.

Consideramos el compacto $E \subset \mathbb{C}$, y para $m \in (0, +\infty)$ definimos

$$A(E, m) = \{f : f \text{ es analítica en } \mathbb{C} \setminus E, f(\infty) = 0, \|f\|_\infty \leq m\}.$$

De esta forma, las funciones del conjunto que acabamos de definir son aquellas que cumplen $f \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{C} \setminus E)$ junto a las propiedades de que su valor en el ∞ es 0 y de que están acotadas en norma por m.

Cabe señalar que cuando estudiábamos el Capítulo 1 nos centrábamos en el caso en el que $m = 1$. De esta forma, el conjunto $A(E, 1)$ se trata del de las funciones admisibles para E. Además, esto da paso a la definición de capacidad analítica. Con la notación que estamos usando en estos momentos podemos decir que la capacidad analítica es el siguiente valor:

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| : f \in A(E, 1)\}.$$

Si seguimos recordando conceptos, teníamos que para cada $f \in A(E, m)$, su derivada en el infinito se definía como sigue:

$$f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) = \lim_{z\to\infty} zf(z),$$

que coincidía con el primer coeficiente de Laurent del desarrollo en serie de potencias de la función f. Esto se debe a que, como f tiene una singularidad evitable en ∞, se comporta como $g(z) = f(\frac{1}{z})$, teniendo g una singularidad evitable en 0. De esta forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

Consecuentemente, $f(\infty) = a_0 = 0$ por hipótesis. Por tanto,

$$f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty)) = \lim_{z\to\infty} z(\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots) = a_1.$$

Una caracterización que también debemos recordar es la siguiente. Dado un compacto E del plano complejo, $\gamma(E) = 0$ si y, solamente si, para toda función f analítica y acotada en $\mathbb{C} \setminus E$ se tiene que f es constante. Es decir, el conjunto E es evitable es equivalente a que el conjunto de funciones acotadas y analíticas en $\mathbb{C} \setminus E$ sea el de las funciones constantes.

En cuanto a medidas de Hausdorff, es evidente que en el ejemplo que vamos a desarrollar a continuación vamos a utilizar la longitud de un conjunto. Como se viene diciendo en diversas ocasiones, dicha longitud es equivalente a la medida 1-dimensional de Hausdorff, por lo que recordaremos este concepto:

$$\mathcal{H}^1(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^1_\delta(E),$$

siendo $\mathcal{H}^1_\delta(E)$ el siguiente valor

$$\mathcal{H}^1_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam} U_i : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ \text{con } \operatorname{diam} U_i \le \delta \text{ para todo } i \ge 1\right\}.$$

Una vez que hemos recordado los conceptos fundamentales con los que vamos a trabajar, comenzamos a presentar el ejemplo sobre el que va a girar nuestro estudio. Se tratará de un ejemplo en el que daremos un conjunto evitable pero, sin embargo, verificando que $\mathcal{H}^1(E) > 0$. Es decir, daremos un contraejemplo para afirmar que la implicación contraria al Teorema de Painlevé no siempre es cierta. Para su desarrollo, enunciaremos una serie de lemas que iremos demostrando para, finalmente, llegar al resultado que deseamos.

En primer lugar, consideramos el "conjunto de Cantor 4 esquinas" en el plano, denotando por E_0 al cuadrado unidad $[0,1] \times [0,1]$ y, E_n con $n > 0$ al conjunto de 4^n cuadrados cuyos lados tienen longitud 4^{-n}. De esta forma, el conjunto de Cantor queda descrito como

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

conteniendo cada componente de E_n otras cuatro de E_{n+1}, dadas por 4 cuadrados de lado 4^{-n-1} situadas en las esquinas del cuadrado de la etapa anterior. Por último, nos referiremos a las componentes de E_n como $E_{n,j}$, para $1 \leq j \leq 4^n$.

Es posible probar que $\mathcal{H}^1(K) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En el capítulo anterior, aunque no calculamos el valor exacto, sí que vimos que $0 < \mathcal{H}^1(K) < +\infty$. En particular, se vió en el Teorema 2.6.5.

Llamando $K_{n,j} = K \cap E_{n,j}$, gracias a la composición de una homotecia y una traslación de K en $K_{n,j}$ se tiene que $\gamma(K) = 4^n \gamma(K_{n,j})$ para todo j y para todo n, por lo que uno de los caminos para probar que $\gamma(K) = 0$ sería demostrar que existe un n y un j tal que $\gamma(K_{n,j}) = 0$. Aún así, el razonamiento que utilizaremos será distinto a esta última observación.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\gamma(K) > 0$. Sea $f \in A(K, 1)$ de forma que $f'(\infty) = a \in (0, +\infty)$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus K_{n,j}$, el Teorema 1.2.12 aplicado al compacto $K_{n,j}$ y al abierto $\mathbb{C} \setminus ((K \setminus K_{n,j}) \cup \{z\})$ nos garantiza la existencia de un ciclo $\Gamma_{n,j}$ en $\mathbb{C} \setminus K$ verificando lo siguiente:

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_{n,j}}(w) = 1, \text{ para todo } w \in K_{n,j}$$
$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_{n,j}}(z) = 0$$
$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_{n,j}}(w) = 0, \text{ para todo } w \in K \setminus K_{n,j}.$$

A partir de esto, definimos la función $f_{n,j}(z)$ como sigue,

$$f_{n,j}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n,j}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

que, como se justifica a continuación, está bien definida.

El razonamiento que vamos a seguir es análogo al que se ha llevado a cabo en otros capítulos.

En primer lugar, la garantía de que puedo construir dicha función la tengo gracias al Teorema 1.2.12, tal y como se ha dicho anteriormente. Tenemos que probar que la función es holomorfa en su dominio de definición y, además, que está bien definida. Esto quiere decir que la definición que hemos dado no dependa del ciclo escogido al principio.

Para ver que está bien definida o, equivalentemente, que su definición no depende del ciclo escogido, supongamos dos ciclos distintos pero que verifican las mismas propiedades en cuanto a los índices y, cada uno de ellos, dando lugar a una función distinta. Para simplificar notación, podemos suponer $\Gamma^1_{n,j}$ para definir $f^1_{n,j}$ y $\Gamma^2_{n,j}$ para definir $f^2_{n,j}$. Como este razonamiento ya se ha llevado a cabo en otras ocasiones, no lo daremos esta vez con detalles.

Consideramos el ciclo de la diferencia $\Gamma^1_{n,j} \cup (-\Gamma^2_{n,j})$ y aplicamos el Teorema de Cauchy. Este nuevo ciclo satisface que el índice es 0 en todos los puntos de $K \cup \{z\}$. Con todo ello, llegamos finalmente a que las funciones $f^1_{n,j}$ y $f^2_{n,j}$ han de ser la misma. Por lo que la función que hemos construido no depende del ciclo que escojamos.

Para ver que la función es analítica en $\mathbb{C} \setminus K_{n,j}$ haremos uso del Teorema de Analiticidad Bajo el Signo de Integral (Teorema 1.2.11) pero aplicado a otro abierto que detallaremos a continuación. Si $z \in \mathbb{C} \setminus K_{n,j}$ es el punto que da lugar a la definición de $\Gamma_{n,j}$ y $z \notin \Gamma^*_{n,j}$, se tiene que existe un $\delta > 0$ de forma que $B(z,\delta) \subset \mathbb{C} \setminus K_{n,j}$ y, además, $B(z,\delta) \cap \Gamma^*_{n,j} = \emptyset$. Es decir, existe un entorno del punto de forma que cualquier otro punto de dicho entorno no pertenece al recorrido de la curva. Definimos para todo $u \in B(z,\delta)$ la función

$$f(u) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{n,j}} \frac{f(w)}{w-u}dw$$

al igual que se hizo antes. Sea el abierto $\Omega = B(z,\delta)$ y la curva definida anteriormente $\Gamma_{n,j}$ en $\mathbb{C}$. Consideramos la función $g : \Omega \times \Gamma^*_{n,j} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{aligned} g : \Omega \times \Gamma^*_{n,j} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u,w) &\longrightarrow \frac{f(w)}{w-u} \end{aligned}$$

de forma que se trata de una aplicación continua al ser el cociente de dos funciones continuas siendo el denominador distinto de 0 para todos los puntos posibles. Ahora bien, para cada $w \in \Gamma^*_{n,j}$, la función

$$\begin{aligned} g_w : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\to g(u,w) \end{aligned}$$

es holomorfa en $B(z,\delta)$. Aplicando el Teorema 1.2.11 a la bola, se tiene que $f_{n,j}$ es holomorfa en el mismo abierto. Por tanto, podemos concluir que $f_{n,j}$ es una función holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus K_{n,j}$.

Por último, otra propiedad que cumple nuestra función es $f_{n,j}(\infty) = 0$. De hecho, para todos los z verificando $|z| > 2$ podemos usar el mismo ciclo $\Gamma_{n,j}$ en la definición de $f_{n,j}$ y entonces,

$$f_{n,j}(\infty) = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{z\to\infty} \int_{\Gamma_{n,j}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n,j}} \lim_{z\to\infty} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Para intercambiar límite e integral podemos utilizar el Teorema de Convergencia Dominada. Ahora bien, en los puntos de $\mathbb{C} \setminus K$, la función f se encuentra acotada en norma por un número m. Por otra parte, en el ∞ dicha función vale 0 por definición por lo que, en cualquiera de los dos casos, la función está acotada, contribuyendo a que el cociente en el que tomamos límite tienda a 0.

Con todas las hipótesis que necesitábamos, nos disponemos a enunciar y demostrar el primero de los lemas para la construcción del ejemplo.

Lema 3.3.1. *1.* $\sum_{j=1}^{4^n} f_{n,j}(z) = f(z)$, *para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

2. Existe una constante $M > 0$ *tal que* $f_{n,j} \in A(K_{n,j}, M)$.

3. $|f'_{n,j}(\infty)| \leq M4^{-n}\gamma(K)$.

Demostración. 1. Fijamos $z \in \mathbb{C} \setminus K$ de forma que tenemos el ciclo $\Gamma_{n,j}$ construido como antes y consideramos ahora otro ciclo definido como $\Gamma = C \cup \bigcup_{j=1}^{4^n}(-\Gamma_{n,j})$, siendo $C = C(R)$ la circunferencia de centro 0 y radio $R > \max\{\sqrt{2}, |z|\}$. Por el Teorema de Cauchy, tenemos que

$$f(z)\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw - \sum_{j=1}^{4^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{n,j}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw - (-\sum_{j=1}^{4^n} f_{n,j}(z)) = h(z) + \sum_{j=1}^{4^n} f_{n,j}(z). \tag{3.5}$$

Ahora bien, sea $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ de forma que, por un resultado visto anteriormente, se tiene que

$$g'(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(w) dw. \tag{3.6}$$

Pues bien, tenemos que

$$g'(\infty) = \lim_{w\to\infty} w(g(w) - g(\infty)) = \lim_{w\to\infty} \frac{w}{w-z} f(w) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Pero la expresión de la derecha de 3.6 es precisamente nuestra función $h(z)$. Por tanto, podemos afirmar que $|h(z)| = 0$, consiguiéndose la igualdad deseada de este apartado.

2. Ya hemos probado con anterioridad que $f_{n,j}(\infty) = 0$, así como que es analítica en el complementario del compacto $K_{n,j}$ correspondiente. Demostremos que existe una constante $M > 0$ tal que $\|f_{n,j}\|_\infty \leq M$.

Para ello, consideramos el cuadrado $E_{n,j}$ de lado $l = 4^{-n}$ y, además, otro cuadrado V de lado $3l$ centrado en dicho $E_{n,j}$. Cabe señalar que este V no corta a otro $E_{n,k}$ gracias a la forma en la que se ha definido. De hecho, $\operatorname{dist}(V, E_{n,k}) \geq 4^{-n}$ para todo $k \neq j_0$.

Gracias al Teorema de Cauchy se tiene que, si $z \in \mathring{V} \setminus K_{n,j}$ y el $\Gamma_{n,j}$ es el ciclo adecuado a ese punto z, por la definición de $f_{n,j}(z)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{n,j}}\frac{f(w)}{w-z}dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{f(w)}{w-z}dw + f_{n,j}(z), \end{aligned}$$

y, de forma equivalente, se llega a

$$f_{n,j}(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V}\frac{f(w)}{w-z}dw, \qquad \text{para todo } z \in \mathring{V} \setminus K_{n,j}.$$

Acotando en valor absoluto la expresión anterior, siempre que z sea cercano a $K_{n,j}$, por ejemplo $\operatorname{dist}(z, K_{n,j}) < l/2$, tenemos

$$\begin{aligned} |f_{n,j}(z)| &\leq |f(z)| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial V}\frac{f(w)}{w-z}dw\right| \leq 1 + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial V}\frac{|f(w)|}{|w-z|}|dw| \leq \\ &\leq 1 + \frac{12l}{\pi l} = 1 + \frac{12}{\pi} = M > 0. \end{aligned}$$

En la cadena de desigualdades se han utilizado diferentes propiedades como que $f \in A(K, 1)$, lo que implica de forma inmediata que $\|f\|_\infty \leq 1$. Además, como $w \in \partial V^*$, $z \in \mathring{V}$ y $\operatorname{dist}(\partial V^*, K_{n,j}) \geq l$, se tiene que

$$|w - z| \geq l - \operatorname{dist}(z, K_{n,j}) \geq l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$$

y, por último,

$$\int_{\partial V}|dw| = \operatorname{long}(\partial V) = 12l.$$

Cabe destacar que la desigualdad que se acaba de conseguir sería válida para aquellos z cercanos a $K_{n,j}$, con el fin de que la diferencia en módulo entre este punto y cualquier otro de la frontera de V sea cercana a l, tal y como expresa una de las desigualdades de arriba.

Gracias al Principio del Módulo Máximo, puesto que $f_{n,j}(\infty) = 0$, podemos afirmar que la desigualdad $|f_{n,j}(z)| \leq M$ es cierta para cualquier valor de z que se encuentre en el conjunto $\mathbb{C} \setminus K_{n,j}$, teniéndose de esta forma la afirmación que queríamos demostrar.

3. Para probar este último apartado utilizaremos la relación de homeomorfía que existe entre el conjunto K de partida y el de la etapa n-ésima $K_{n,j}$ teniéndose que $\gamma(K) = \gamma(4^n K_{n,j})$. Gracias a las propiedades de la capacidad analítica, esto equivale a decir que $\gamma(K_{n,j}) = 4^{-n}\gamma(K)$. Además, si $f_{n,j} \in A(K_{n,j}, M)$, tal y como se ha probado en el segundo apartado, significa que $\|f\|_\infty \leq M$. Como $M > 0$, se tiene de inmediato que

$$\frac{f_{n,j}}{M} \in A(K_{n,j}, 1).$$

Recapitulando todo lo anterior tenemos que

$$\gamma(K)4^{-n} = \gamma(K_{n,j}) = \sup\{|f'(\infty)| \text{ tal que } f \in A(K_{n,j}, 1)\} \geq \left|\frac{f'_{n,j}(\infty)}{M}\right|$$

Por tanto,

$$|f'_{n,j}(\infty)| \leq M4^{-n}\gamma(K)$$

Con estos tres puntos queda demostrado el Lema 3.3.1. □

Denotamos a partir de este momento $a_{n,j} = f'_{n,j}(\infty)$

Lema 3.3.2. *Sea $z \notin E_n$ y consideramos la suma $h_n = \sum_{j=1}^{4^n} h_{n,j}$, donde cada sumando viene definido como*

$$h_{n,j}(z) = a_{n,j}4^{2n} \iint_{E_{n,j}} \frac{1}{x + iy - z} dxdy, \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus E_{n,j}.$$

Entonces, la sucesión de funciones $\{h_n\}_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada.

Demostración. Denotamos por comodidad Q al cuadrado $E_{n,j}$ de lado 4^{-n} y B a bola de centro $z \notin Q$ y radio r intersecando con Q de forma que las áreas de ambos elementos coincidan, es decir, $m_2(Q) = m_2(B)$, siendo m_2 la medida bidimensional de Lebesgue. Cuantificando esta relación, se tiene que

$$4^{-2n} = \pi r^2,$$

de donde obtenemos que el valor del radio es, en ese caso,

$$r = \frac{4^{-n}}{\sqrt{\pi}}.$$

A continuación vamos a buscar una cota para la integral de área que aparece en el enunciado del lema. Para ello, consideramos $w = x + iy \in Q$, de forma que

$$\int_Q \frac{dm_2(w)}{|w-z|} = \int_{Q\cap B} \frac{dm_2(w)}{|w-z|} + \int_{Q\setminus B} \frac{dm_2(w)}{|w-z|} \leq \int_{Q\cap B} \frac{dm_2(w)}{|w-z|} + \int_{Q\setminus B} \frac{dm_2(w)}{r} =$$

$$= \int_{Q\cap B} \frac{m_2(w)}{|w-z|} + \int_{B\setminus Q} \frac{dm_2(w)}{r} \leq \int_{Q\cap B} \frac{m_2(w)}{|w-z|} + \int_{B\setminus Q} \frac{dm_2(Q)}{|w-z|} = \int_B \frac{dm_2(Q)}{|w-z|}$$

Cabe señalar que en las dos desigualdades que aparecen se ha utilizado lo siguiente: $|w - z| \geq r$ si $w \notin B$ y, $|w - z| \leq r$ si $w \in B$. Por otra parte, en la igualdad intermedia se utiliza, al tratarse la segunda integral de una constante, que

$$m_2(Q \setminus B) = m_2(Q) - m_2(Q \cap B) = m_2(B) - m_2(Q \cap B) = m_2(B \setminus Q)$$

Reparametrizando la última integral en coordenadas polares, tenemos que

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z + \rho cos(\theta) \\ y = \operatorname{Im} z + \rho sen(\theta) \end{cases} \qquad \text{con } 0 \leq \rho \leq r \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

siendo el determinante de la matriz Jacobiana igual a ρ. Luego,

$$\iint_{E_{n,j}} \frac{dxdy}{|x+iy-z|} \leq \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{1}{\rho} \rho d\rho d\theta = r2\pi = \frac{4^{-n}}{\sqrt{\pi}} 2\pi$$

Por tanto,

$$|h_{n,j}(z)| = \left| a_{n,j} 4^{2n} \iint_{E_{n,j}} \frac{dxdy}{x+iy-z} \right| \leq |f'_{n,j}(\infty)||4^{2n}| \frac{4^{-n}}{\sqrt{\pi}} 2\pi \leq$$

$$\leq M 4^{-n} \gamma(K) 4^{2n} \frac{4^{-n}}{\sqrt{\pi}} 2\pi = 2M\sqrt{\pi}\gamma(K) = M_1$$

donde hemos utilizado el tercer apartado del Lema 3.3.1.

Por otra parte,

$$h'_{n,j}(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(h_{n,j}(z) - h_{n,j}(\infty)) = \lim_{z\to\infty} z h_{n,j}(z) =$$

$$= \lim_{z\to\infty} a_{n,j} 4^{2n} z \iint_{E_{N,j}} \frac{dxdy}{x+iy-z} = a_{n,j} 4^{2n}(-m_2(E_{n,j})) = -a_{n,j} 4^{2n} 4^{-2n} = -a_{n,j},$$

donde se ha usado que $h_{n,j}(\infty) = 0$.

Si definimos $g_{n,j} = f_{n,j} + h_{n,j}$, se tiene que esta función posee un cero doble en el ∞ y además $|g_{n,j}| \leq M + M_1 = M_2$.

A continuación vamos a hacer uso del Lema de Schwarz generalizado (Lema 1.2.5) pero para el caso que nos interesa: $k = 2$. De esta forma, recordamos que el resultado queda enunciado como sigue:

Lema 3.3.3. *Sea una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ de forma que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y que verifica $f(0) = f'(0) = 0$. Entonces, se tiene que*

$$|f(z)| \leq |z|^2 \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Como en las hipótesis se exige que f esté acotada por 1 para todo punto del disco unidad, podemos definir f como $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Una vez enunciado este resultado, vamos a aplicarlo a un caso particular utilizando los datos que sean necesarios para nuestro trabajo. Para ello, comenzamos tomando $e_{n,j}$ como el centro del cuadrado $E_{n,j}$ de forma definimos la función $p_{n,j}$ como

$$\begin{aligned} p_{n,j} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow \frac{1}{M_2} g_{n,j}\left(e_{n,j} + \frac{l}{z}\right) \end{aligned}$$

Así, tenemos que para todo $z \in \mathbb{D}$, $e_{n,j} + \frac{l}{z} \notin E_{n,j}$ puesto que $E_{n,j} \subset B(e_{n,j}, l)$. Vamos a comprobar que la función $p_{n,j}(z)$ con $z \in \mathbb{D}$ satisface las condiciones del Teorema de Schwarz.

En primer lugar,

$$|p_{n,j}(z)| = \frac{1}{M_2}\left|g_{n,j}\left(e_{n,j} + \frac{l}{z}\right)\right| \leq \frac{1}{M_2} M_2 = 1$$

por lo que podemos definir nuestra función como una aplicación que va del disco unidad al mismo disco.

Además, $p_{n,j}(0) = \dfrac{1}{M_2} g_{n,j}(\infty) = 0$ tal y como se indicó más arriba. Como la función $g_{n,j}$ tiene un cero doble en el ∞, se tiene también que $p'_{n,j}(0) = \frac{1}{M_2} g'_{n,j}(\infty) = 0$.

Como se cumplen las hipótesis, aplicamos el resultado y llegamos a que

$$|p_{n,j}(z)| = \left|\frac{1}{M_2} g_{n,j}\left(\frac{l}{z}\right)\right| \leq |z|^2$$

Por último, haciendo el cambio $w = e_{n,j} + \frac{l}{z}$ de forma que $|w - e_{n,j}| = \frac{l}{|z|}$, y despejando de forma conveniente, obtenemos que

$$|g_{n,j}(w)| \leq M_2 \left(\frac{l}{|w - e_{n,j}|} \right)^2 \leq \frac{M_2 4^{-2n}}{\text{dist}(w, E_{n,j})^2},$$

donde se ha utilizado que $|w - e_{n,j}| \geq \text{dist}(w, E_{n,j})$.

Por último, sabiendo por el Lema 3.3.1 que $f = \sum_{j=1}^{4^n} f_{n,j}$, tenemos que probar que $\sum_{j=1}^{4^n} g_{n,j}$ es una suma uniformemente acotada. Para ello, sea $1 \leq j_0 \leq 4^n$, consideramos z cercano a E_{n,j_0} de forma que, por ejemplo $\text{dist}(z, E_{n,j_0}) < 4^{-n}$. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{4^n} |g_{n,j}(z)| \leq M_2 + \sum_{j \neq j_0} \frac{M_2 4^{-2n}}{\text{dist}(z, E_{n,j})^2}, \tag{3.7}$$

donde se ha utilizado que $|g_{n,j_0}| \leq M_2$ como ya se vió anteriormente. Para el resto de funciones $g_{n,j}$ se ha utilizado la cota que hemos encontrado justo arriba. Para acotar este término vamos a razonar ahora de la siguiente forma. Tenemos, para cualquier $j \neq j_0$ que

$$\text{dist}(z, E_{n,j}) \geq \text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j}) - \text{dist}(z, E_{n,j_0}) \geq \text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j}) - 4^n \geq \frac{\text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j})}{2},$$

utilizándose en la última desigualdad el hecho de que $4^{-n} \leq \text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j})/2$. Por tanto, hemos llegado a que

$$\frac{1}{\text{dist}(z, E_{n,j})} \leq \frac{2}{\text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j})}.$$

Continuando la acotación de la expresión 3.7 tenemos que

$$\sum_{j=1}^{4^n} |g_{n,j}(z)| \leq M_2 + \sum_{j \neq j_0} \frac{M_2 4^{-2n+1}}{\text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j})^2}. \tag{3.8}$$

Para seguir buscando una cota que no dependa de z vamos ahora a fijarnos en el número de cuadrados que hay en cada etapa a una cierta distancia de E_{n,j_0}.

De esta forma, si nos fijamos en el cuadrado de la etapa $(n-1)$-ésima al que pertenece el cuadrado E_{n,j_0}, existen otros tres cuadrados $E_{n,j}$ en dicha etapa de forma que

$$\text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j}) > 2 \cdot 4^{-n}.$$

Acto seguido, podemos ver que existen $3 \cdot 4 = 12$ cuadrados que han aparecido en la etapa n-ésima de forma que se encuentran en el mismo cuadrado de la etapa $(n-2)$-ésima que E_{n,j_0}, teniéndose que

$$\text{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j}) > 2 \cdot 4^{-n+1}.$$

Razonando de forma análoga con todas las etapas, llegamos a que existen $3 \cdot 4^{n-1}$ cuadrados de la etapa n-ésima que se encuentran en E_0 y de forma que se satisface

$$\operatorname{dist}(E_{n,j_0}, E_{n,j}) > 2 \cdot 4^{-n+n-1} = 2 \cdot 4^{-1}.$$

Sumando todos los cuadrados y continuando la acotación a partir de la expresión 3.8 tenemos que

$$\sum_{j=1}^{4^n} |g_{n,j}(z)| \leq M_2 + \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{M_2 4^{-2n+1}}{(2 \cdot 4^{-n+l})^2} \right) \cdot 3 \cdot 4^l = M_2 + 3 \cdot M_2 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{4^l}{4^{2l}} =$$

$$= M_2(1 + 3 \sum_{l=0}^{n-1} 4^{-l}) \leq M_2 \left(1 + 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 5M_2.$$

De esta forma, hemos conseguido una cota que no depende de z, ni tan siquiera de n, para la suma de los módulos de las funciones $g_{n,j}(z)$. Al hacer tender n a $+\infty$, la suma infinita de dichas funciones sigue estando acotada por $5M_2$. De esta forma, si z es cercano a algún E_n, lo será a algún E_{n,j_0} en particular y se tendrá la cota anterior. Por la definición de $g_{n,j}$, se tendrá para la suma de las funciones $h_{n,j}$, es decir, para h_n. Si, por el contrario, es cercano a ∞, tenemos que la función $h_{n,j}$ es cero como ya se demostró anteriormente. En cualquier caso, utilizando el Principio del Módulo Máximo, podemos concluir que $\{h_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada. □

Lema 3.3.4. *Para algún n y j se satisface que $a_{n,j} \neq a4^{-n}$*

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $a_{n,j} = a4^{-n}$, para todo $n \geq 0$, y para todo j verificando $1 \leq j \leq 4^n$. Luego, $a^{-1}Re(h_n(0)) = A_n$ está acotado. Pero, teniendo en cuenta que

$$Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} \;\; \forall\, z = a + bi \in \mathbb{C}$$

tenemos que

$$A_n = a^{-1}Re(h_n(0)) = \frac{4^{-n}}{a_{n,j}} Re \left(\sum_{j=1}^{4^n} a_{n,j} 4^{2n} \iint_{E_{n,j}} \frac{dxdy}{x + iy} \right) =$$

$$= 4^n \sum_{j=1}^{4^n} \iint_{E_{n,j}} \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy$$

Ahora bien, considerando nuestro conjunto de Cantor restringido a $\{x > \frac{1}{2}\}$, tenemos que $x^2 + y^2 \leq 2$, $x > \frac{1}{2}$, luego

$$4^n \sum_{E_{n,j} \subset \{x > \frac{1}{2}\}} \iint_{E_{n,j}} \frac{xdxdy}{x^2 + y^2} \geq 4^n \frac{1}{4} \sum_{E_{n,j} \subset \{x > \frac{1}{2}\}} \iint_{E_{n,j}} dxdy \geq$$

$$\geq 4^n \frac{1}{4} 4^{-2n} \cdot 2 \cdot 4^{n-1} \geq 4^{-2}$$

En segundo lugar, la suma de los términos correspondientes a la intersección del conjunto de Cantor con $\{x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}\}$ es A_{n-1}, tal y como se prueba a continuación:

$$4^n \iint_{E_n \cap \{x<\frac{1}{2}, y<\frac{1}{2}\}} \frac{x}{x^2+y^2} dxdy = 4^n \iint_{E_{n-1}} \frac{\frac{u}{4}}{\frac{u^2}{4^2}+\frac{v^2}{4^2}} \frac{1}{4^2} dudv =$$
$$= 4^{n-1} \iint_{E_{n-1}} \frac{u}{u^2+v^2} dudv = A_{n-1},$$

donde se ha llevado a cabo el cambio $x = u/4, y = v/4$ y se ha tenido en cuenta que $E_n \cap \{x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}\} = \frac{1}{4} E_{n-1}$.

Con todo ello, tendremos que $A_n \geq A_{n-1} + 4^{-2}$ para todo $n \geq 1$. Si hacemos tender n a ∞ tenemos que $\lim_{n \to \infty} A_n = +\infty$, llegando así a una contradicción con la afirmación que hicimos al comienzo de que A_n era una cantidad acotada.

Por tanto, la hipótesis de partida es falsa y, afirmamos de esta forma que existe algún n y algún j de forma que $a_{n,j} \neq a4^{-n}$. □

Lema 3.3.5. *Dados $\varepsilon > 0$ y $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda función $f \in A(K, M)$ con $|f'(\infty)| \geq \varepsilon$ se satisface*

$$\sup_{n,j} 4^n |a_{n,j}| \geq (1+\delta)|f'(\infty)|. \tag{3.9}$$

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que dada una sucesión $\{\delta_k\}$ que tiende a 0, existe $f_k \in A(K, M)$ verificando $|f'_k(\infty)| \geq \varepsilon$ de forma que

$$|a_{n,j}^{(k)}| \leq 4^{-n}(1+\delta_k)|f'_k(\infty)|$$

donde $a_{n,j}^{(k)}$ tienen el significado que le fue asignado antes del segundo lema pero, en esta ocasión, para las funciones f_k.

Por hipótesis, las funciones $\{f_k\}$ pertenecen a la familia acotada $A(K, M)$ que, gracias el Teorema de Montel, se trata de una familia normal. Esto quiere decir que existe una subsucesión de $\{f_k\}$ y una función $f \in A(K, M)$ con $|f'(\infty)| \geq \varepsilon$ y $|a_{n,j}| \leq 4^{-n}|f'(\infty)|$ de forma que el límite de la sucesión $\{f_k\}$ es f cuando se hace tender k a infinito. Esto implica directamente que $a_{n,j} = 4^{-n} f'(\infty)$, como vemos a continuación

$$f'(\infty) = |f'(\infty)| = \left| \sum_{j=1}^{4^n} a_{n,j} \right| \leq \sum_{j=1}^{4^n} |a_{n,j}| \leq 4^n 4^{-n} |f'(\infty)| = f('\infty).$$

Por tanto, todas las desigualdades son, en realidad, igualdades y se tiene la expresión escrita arriba. Esto supone una contradicción con lo demostrado en el Lema 3.3.4, por lo que la hipótesis de partida es falsa. □

Finalmente, una vez demostrados estos lemas, nos disponemos a probar que $\gamma(K) = 0$.

Para ello, recordamos que si $\gamma(K) > 0$, existía una función llamada función de Ahlfors $f \in A(K,1)$ con $a = f'(\infty) = \gamma(K) > 0$. El segundo apartado del Lema 3.3.1 nos garantiza la existencia de una constante $M \geq 1$ de forma que $f_{n,j} \in A(K,M)$. De esta forma, escogemos de forma conveniente M y $\varepsilon = a$ con el fin de hacer uso del Lema 3.3.5. Usando este resultado, podemos afirmar que existen n_1 y j_1 tales que

$$|a_{n_1,j_1}| \geq a(1+\delta)4^{-n_1}.$$

Como el conjunto K_{n_1,j_1} es geométricamente similar a K (pues, como se ha dicho en otras ocasiones, existe una homotecia y una traslación que conduce puntos de un conjunto en puntos del otro), podemos aplicar de nuevo el Lema 3.3.5 a f_{n_1,j_1}. Repitiendo este proceso continuamente, obtenemos una sucesión (n_k, j_k) de forma que

$$|a_{n_k,j_k}| \geq a(1+\delta)^k 4^{-n_k}.$$

Como $(1+\delta)^k$ tiende a $+\infty$ cuando hacemos tender k a $+\infty$, sabemos que existe un valor K de forma que $(1+\delta)^K > M$. Esto nos garantiza la existencia de unos valores n, j de forma que

$$|f'_{n,j}(\infty)| > aM4^{-n} = \gamma(K)M4^{-n},$$

lo que supone una contradicción con el tercer punto del Lema 3.3.1.

Finalmente, concluimos que nuestra hipótesis de partida no es cierta, por lo que la capacidad analítica ha de ser necesariamente 0 para este conjunto de longitud positiva.

Capítulo 4

Capacidad Analítica con $\dim_{\mathcal{H}} > 1$.

4.1. La transformada de Cauchy.

En esta sección ofreceremos el resultado fundamental que vamos a tratar en este tema, en particular, aquel que prueba que siempre que la dimensión de Hausdorff de un compacto sea estrictamente mayor que 1, se tiene que dicho compacto no es evitable. Para ello serán necesarios resultados que enunciaremos aquí pero cuyo estudio se llevará a cabo en otras secciones del capítulo. Comenzamos construyendo una nueva función basándonos en argumentos de variable compleja que se irán citando a medida que vayamos utilizando.

Una de las herramientas fundamentales del análisis complejo es la Fórmula Integral de Cauchy. Dado un abierto Ω del plano complejo, que podemos suponer simplemente conexo, y una curva cerrada $\Gamma \subset \Omega$, la Fórmula Integral de Cauchy establece que para $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se tiene que

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

En particular, si la curva Γ da una vuelta alrededor del punto $z \in \Omega$ o, equivalentemente, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$, se satisface que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

A partir de este concepto, vamos a definir lo que se conoce como transformada de Cauchy. Para ello, dada una medida de Borel finita μ en $\mathbb{C}$, se define la transformada de Cauchy de μ como la función

$$\mathcal{C}\mu(z) = \int \frac{1}{w-z}d\mu(w). \tag{4.1}$$

Es posible comprobar que fuera del soporte de la medida μ, la función $\mathcal{C}\mu$ es analítica. En cambio, sobre el soporte de μ puede no serlo y, de hecho, puede que la integral de la definición no converja absolutamente. En ese caso, se tiene que la integral es absolutamente convergente para casi todo $z \in \mathbb{C}$, respecto a la medida de Lebesgue y, de esta forma, podemos afirmar que $\mathcal{C}\mu$ está bien definida para casi todo $z \in \mathbb{C}$.

Proposición 4.1.1. *Sea una medida μ finita soportada por el compacto $K \subset \mathbb{C}$. Entonces, $\mathcal{C}\mu$ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus K$.*

Demostración. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$, abierto del plano complejo al ser K compacto. Consideramos un triángulo cerrado y macizo $T \subset \Omega$. Nuestro objetivo es calcular

$$\int_{\partial T} \mathcal{C}\mu(z)dz.$$

Comenzamos probando la continuidad de la función $\mathcal{C}\mu$, pues nos hará falta más adelante. Consideramos una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 1}$ de forma que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{en } \mathbb{C} \setminus K.$$

Por tanto, existe un número $\delta > 0$ de forma que $|z_n - w| \geq \delta$ para todo $n \geq 1$ y para todo punto $w \in K$. Esto es lo mismo que decir que

$$|f_n(w)| = \left|\frac{1}{z_n - w}\right| \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por tanto, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(w) = f(w) = \frac{1}{w - z_0} \quad \text{para todo } w \in K.$$

Haciendo uso del Teorema de Convergencia Dominada, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}\mu(z_n) = \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{w - z_n} d\mu(w) = \int \lim_{n\to\infty} \frac{1}{w - z_n} \mu(w) = \int \frac{1}{w - z_0} d\mu(w) = C\mu(z_0),$$

quedando probado de esta forma el hecho de que la transformada de Cauchy es una función continua.

A continuación, aplicaremos el Teorema de Fubini, así como la definición de la transformada de Cauchy a la integral que queríamos calcular al principio. De esta forma, se tiene que

$$\int_{\partial T} \mathcal{C}\mu(z)dz = \int_{\partial T} \int \frac{1}{w - z} d\mu(w)dz = \int \int_{\partial T} \frac{1}{w - z} dz d\mu(w) = 0.$$

En la última igualdad hemos utilizado el Teorema de Goursat, ya que la función $z \to \frac{1}{w-z}$ es continua y holomorfa en Ω. Por tanto, nos encontrábamos en las condiciones de aplicarlo.

Como el triángulo escogido al principio es arbitrario tenemos que

$$\int_{\partial T} \mathcal{C}\mu(z)dz = 0$$

para todo triángulo $T \subset \Omega$. Aplicando ahora el Teorema de Morera, podemos afirmar que $f \in \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus K)$. $\square$

Normalmente, cuando hablamos de medidas nos solemos referir a medidas positivas pero es importante señalar, a modo de observación, que la transformada de Cauchy también tiene sentido para medidas complejas.

En cuanto a las aplicaciones de la transformada de Cauchy se encuentra facilitar el problema de Painlevé, que planteaba la existencia de funciones analíticas y acotadas en el complementario de un compacto dado del plano. La transformada de Cauchy es una herramienta fundamental en este ámbito, pues permite construir funciones con dichas características a partir de medidas. El único problema de importancia será garantizar que la transformada de Cauchy de una medida en concreto sigue siendo una función acotada.

Nuestro estudio de la transformada de Cauchy se va a basar en los resultados que probaremos en la sección posterior a ésta en torno al Lema de Frostman. Con todo ello, el objetivo será demostrar que si la dimensión de Hausdorff de un compacto de $\mathbb{C}$ es estrictamente mayor que 1, entonces dicho compacto no es evitable.

A continuación vamos a enunciar el Lema de Frostman aunque, como se ha comentado anteriormente, la prueba se hará en una sección posterior a ésta.

Lema 4.1.2 (Lema de Frostman). *Sea E compacto de $\mathbb{R}^d$ de forma que $\mathcal{H}^s(E) > 0$ para cierto $s \in (0, d)$. Entonces existe una constante $b > 0$ y una medida finita μ en E de forma que*

1. $\mu(E) > 0$.

2. $\mu(B(x, r) \cap E) \leq br^s$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *y para todo* $r > 0$.

La demostración de este resultado la tendremos gracias al teorema que vamos a enunciar a continuación, cuya prueba será la que ocupe los contenidos principales de las siguientes secciones del capítulo.

Teorema 4.1.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Existe un subconjunto compacto $F \subset E$, una constante $b > 0$ y un radio $r_0 > 0$ de forma que*

1. $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$.

2. $\mathcal{H}^s(F \cap B(x, r)) \leq br^s$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *y para todo* $r \in (0, r_0)$.

Vamos a explicar cómo se probaría el Lema de Frostman a partir del Teorema 4.1.3. Sea la medida μ y el compacto E de forma que

$$\mu(B) = \mathcal{H}^s(F \cap B) \quad \text{para todo } B \text{ Borel.} \tag{4.2}$$

En primer lugar, tenemos que

$$\mu(E) = \mathcal{H}^s(F \cap E) = \mathcal{H}^s(F)$$

puesto que $F \subset E$ y, por tanto, la intersección de ambos conjuntos es F. Atendiendo al enunciado del Teorema 4.1.3, tendríamos que

$$0 < \mu(E) < +\infty.$$

Por otra parte, existe una constante $b > 0$ y un radio $r_0 > 0$ tal que

$$\mu(B(x,r)) = \mathcal{H}^s(F \cap B(x,r)) \leq br^s$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y $r \in (0, r_0)$. Pero debido a que la medida μ está soportada en E, se tiene que

$$\mu(B(x,r)) = \mu(B(x,r) \cap E).$$

Por tanto, llegamos a

$$\mu(B(x,r) \cap E) \leq br^s \quad \text{si } r < r_0.$$

En el caso en el que $r \geq r_0$, tenemos que

$$\mu(B(x,r) \cap E) \leq \mu(E) \leq \frac{\mu(E)}{r_0^s} r^s, \tag{4.3}$$

ya que $r/r_0 \geq 1$. Tomando como $b_1 = \text{máx}\{b, \frac{\mu(E)}{r_0^s}\}$, tenemos que

$$\mu(B(x,r) \cap E) \leq b_1 r^s \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^d \text{ y para todo } r > 0, \tag{4.4}$$

dando por concluida, de esta forma, la prueba del Lema de Frostman.

En el resultado que vamos a exponer a continuación se enuncia la propiedad fundamental sobre la que gira todo el capítulo. Demostraremos que cualquier compacto con dimensión de Hausdorff estrictamente mayor que 1 es no evitable. En algunas fuentes bibliográficas como en [Tol], el resultado está enfocado en encontrar una constante que sirva de cota inferior, junto a la medida $\mathcal{H}^s_\infty$ del compacto, para la capacidad analítica. Nuestra prueba se basará en esas técnicas pero no prestaremos tanta atención a las constantes que obtendremos como a las consecuencias que ofrece el resultado y que ya han sido citadas anteriormente.

Teorema 4.1.4. *Sea $s > 1$. Todo compacto $E \subset \mathbb{C}$ con dimensión de Hausdorff*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) > 1 \tag{4.5}$$

es no evitable.

Demostración. Dado un compacto $E \subset \mathbb{C}$, si $\dim_{\mathcal{H}}(E) > 1$, sabemos por resultados teóricos que ya hemos estudiado sobre la dimensión de Hausdorff que existe un valor $s > 1$ de forma que $\mathcal{H}^s(E) > 0$. Incluso, podemos suponer que $1 < s < 2$.

Podemos afirmar, gracias al Lema de Frostman (Lema 4.1.2), que existe μ medida de Borel soportada en E de forma que se verifica

$$0 < \mu(E) < +\infty \tag{4.6}$$

y, además

$$\mu(B(x,r) \cap E) = \mu(B(z,r)) \leq br^s$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, siendo b una constante.

Consideramos ahora la función $\mathcal{C}\mu$, es decir, la transformada de Cauchy definida en esta sección. Tenemos que, gracias a la propia definición, $\mathcal{C}\mu(\infty) = 0$. Para comprobarlo podemos utilizar, como hemos hecho en otras ocasiones, el Teorema de Convergencia Dominada. Además, siguiendo la definición de derivada en el infinito presentada en el Capítulo 1, tenemos que,

$$\mathcal{C}\mu'(\infty) = \lim_{z\to\infty} z(\mathcal{C}\mu(z) - \mathcal{C}\mu(\infty)) = \lim_{z\to\infty} \int_E \frac{z}{w-z} d\mu(w) = -\int_E d\mu(w) = -\mu(E).$$

En definitiva, $|\mathcal{C}\mu'(\infty)| = \mu(E)$.

Otro detalle a tener en cuenta es el siguiente. Tenemos que, dado $t > 0$,

$$B(z, \frac{1}{t}) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < \frac{1}{t}\}$$

Por tanto, si intersecamos este conjunto con el compacto E obtenemos lo siguiente:

$$B\left(z, \frac{1}{t}\right) \cap E = \{w \in E : \frac{1}{|z-w|} > t\},$$

de forma que si tomamos medidas se tiene que

$$\mu(\{w \in E : \frac{1}{|z-w|} > t\}) \leq \min\left\{\frac{b}{t^s}, \mu(E)\right\},$$

donde se ha utilizado la hipótesis que teníamos de la medida de las bolas. Con todo esto, nos disponemos a dar una aproximación de $\|\mathcal{C}\mu\|_\infty$. Para ello, sea $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$|\mathcal{C}\mu(z)| \leq \int_E \frac{1}{|w-z|} d\mu(w) = \int_0^\infty \mu(\{w \in E : \frac{1}{|z-w|} > t\})dt \leq \int_0^\infty \text{mín}\left\{\frac{b}{t^s}, \mu(E)\right\} dt.$$

Llegados a este punto debemos definir la integral en dos tramos distintos: uno en el que $\mu(E)$ sea el mínimo y otro trozo en el que el valor mínimo se alcance en $\frac{b}{t^s}$. Para ello, consideramos t_0 el valor en el que ambas medidas coinciden y lo calculamos explícitamente. En particular ese valor es en el que el mínimo pasa de ser $\mu(E)$ para convertirse en $\frac{b}{t^s}$.

$$\frac{b}{t^s} = \mu(E) \quad \text{si y solo si} \quad t = \left(\frac{b}{\mu(E)}\right)^{\frac{1}{s}} = t_0.$$

Continuando con la acotación de la integral tenemos que

$$\int_0^\infty \text{mín}\left\{\frac{b}{t^s}, \mu(E)\right\} dt = \int_0^{t_0} \mu(E)dt + \int_{t_0}^\infty \frac{b}{t^s}dt = \mu(E)t_0 + \frac{t_0^{1-s}}{s-1}.$$

Sustituyendo el valor de t_0 que habíamos obtenido arriba y llevando a cabo algunos cálculos elementales se tiene que

$$|\mathcal{C}\mu(z)| \leq \mu(E)^{1-\frac{1}{s}} \frac{b^{\frac{1}{s}}(s-1+b^{-1})}{s-1}.$$

Como el razonamiento se desarrollado para todo $z \in \mathbb{C}$, podemos decir que

$$\|\mathcal{C}\mu\|_\infty \leq \mu(E)^{1-\frac{1}{s}} \frac{b^{\frac{1}{s}}(s-1+b^{-1})}{s-1}.$$

Es fácil comprobar que la norma de la función

$$\frac{|\mathcal{C}\mu|}{\|\mathcal{C}\mu\|_\infty}$$

es 1, por lo que dicha función es admisible para E. Debido a que la capacidad analítica de un compacto tomaba supremo de entre todas las funciones admisibles para dicho compacto se tiene que

$$\gamma(E) \geq \frac{|\mathcal{C}\mu'(\infty)|}{\|\mathcal{C}\mu\|_\infty} \geq \mu(E)\frac{s-1}{b^{\frac{1}{s}}(s-1+b^{-1})}\mu(E)^{\frac{1}{s}-1} > 0$$

y, por tanto, E no es evitable, tal y como queríamos probar. $\square$

4.2. Construcción de una nueva medida.

Una red de medidas es una herramienta considerablemente útil a la hora del estudio de las medidas de Hausdorff, pues su comportamiento es a veces más conveniente que el de las anteriores y, además, pueden construirse de forma que ambas medidas sean equivalentes.

Para la construcción de dicha red de medidas utilizaremos recubrimientos por compactos de una clase restringida $\mathcal{N}$ de forma que los conjuntos pertenecientes a ella verificarán lo siguiente:

$$\text{Si } U, V \in \mathcal{N} \Rightarrow U \cap V = \emptyset, \text{ ó } U \subset V, \text{ ó } V \subset U$$

Además, podemos suponer que cada conjunto de $\mathcal{N}$ está contenido en un número finito de otros conjuntos de la clase, por lo que eliminando los primeros obtenemos una colección disjunta de conjuntos manteniendo la unión que se tenía al principio. A estos conjuntos que quedan los llamaremos maximales.

Proposición 4.2.1. *Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$. Entonces existe una clase $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ de forma que*

1. *Los elementos de S_0 son dos a dos disjuntos.*
2. $\bigcup_{B\in\mathcal{S}} B = \bigsqcup_{B\in S_0} B$.

Demostración. Sabemos que para la clase de conjuntos que se ha definido, dos conjuntos cualesquiera que pertenezcan a ella o tienen intersección vacía, o uno está contenido en el otro, o viceversa.

Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, consideramos dos elementos cualesquiera de $\mathcal{S}$. En el caso en el que uno esté contenido en el otro, eliminamos el que está contenido y seguimos haciendo la misma comprobación con el que nos ha quedado y el resto de la clase $\mathcal{S}$. Si, por el contrario, existe un elemento que es dos a dos disjunto con cualquier otro de la clase $\mathcal{S}$, mantenemos dicho conjunto y ese mismo no elimina a ningún otro.

En definitiva, eliminamos los conjuntos que estén contenidos en algún otro de la clase. El resultado es una clase de conjuntos que no contienen a ningún otro de la misma clase, es decir, conjuntos maximales y cuya unión sigue siendo la misma que inicialmente. Esta es la clase $\mathcal{S}_0$. Evidentemente, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ puesto que se ha construido a partir de elementos de la segunda, eliminando aquellos que estuvieran contenido en otros conjuntos de la clase.

Más formalmente, $\mathcal{S}_0$ sería la clase formada por los conjuntos de $\mathcal{S}$ maximales para la inclusión; es decir, aquellos que no estén contenidos estrictamente en otros conjuntos de $\mathcal{S}$. En primer lugar, dos conjuntos cualesquiera distintos son dos a dos disjuntos. Si, por el contrario, se cortaran, debido a la clase a la que pertenecen uno debería estar contenido en el otro. Esto es imposible porque hemos exigido que dichos conjuntos sean maximales para la inclusión. Por otra parte, al eliminar un conjunto que esté contenido en otro mayor, la unión sigue siendo la misma, por la que unión de conjuntos en $\mathcal{S}$ es la misma que la unión de conjuntos en $\mathcal{S}_0$. $\square$

Para construir la red de medidas s-dimensional en $\mathbb{R}^d$, que vamos a denotar por $\mathcal{M}^s$, consideramos $\mathcal{N}$ como la colección de todos los cubos díadicos semiabiertos superiormente de dimensión d, es decir, conjuntos de la forma

$$S = [2^{-k}m_1, 2^{-k}(m_1+1)) \times \cdots \times [2^{-k}m_d, 2^{-k}(m_d+1)),$$

con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $m_i \in \mathbb{Z}$ para i verificando $1 \leq i \leq d$. Al lado de un cubo S lo denotaremos de aquí en adelante como $\ell(S)$. Por tanto, el conjunto que acabamos de definir se puede expresar como

$$\mathcal{N} = \{I \text{ diádicos } : \ell(I) \leq 1\}. \tag{4.7}$$

Por otra parte, denotraremos por $\mathcal{N}_k$ al siguiente conjunto

$$\mathcal{N}_k = \{I \text{ diádicos } : \ell(I) \leq 2^{-k}\} \quad \text{con } k = 0, 1, \ldots. \tag{4.8}$$

Por último, definimos el conjunto $\mathcal{D}_k$ como

$$\mathcal{D}_k = \{I \text{ diádicos } : \ell(I) = 2^{-k}\}. \tag{4.9}$$

De esta forma, existen relaciones entre los conjuntos anteriormente definidos como,

$$\mathcal{N}_k = \bigsqcup_{j \geq k} \mathcal{D}_j \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_k = \mathcal{N}_k \setminus \mathcal{N}_{k+1}.$$

Una vez que tenemos las herramientas necesarias comenzamos a exponer las primeras definiciones de las que se ocupa el tema que se vamos a estudiar.

Definición 4.2.2. *Sean $E \subset \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ y $s > 0$, definimos*

$$\mathcal{M}^s_\delta(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \ell(S_i)^s \tag{4.10}$$

tomando el ínfimo sobre todos los recubrimientos de E por conjuntos $\{S_i\}$ de $\mathcal{N}$ con $\ell(S_i) \leq \delta$ para todo $i \geq 1$.

Cabe señalar que las medidas $\mathcal{M}^s_\delta$ y $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}$ coinciden cuando $\delta \in [2^{-k}, 2^{-k+1})$. Esto se debe a que si existe algún recubrimiento por conjuntos de $\mathcal{N}$ de forma que el lado de cada conjunto sea menor que $\delta < 2^{-k+1}$, por pertenecer precisamente a esa clase de conjuntos definida anteriormente, debe ser $\delta = 2^{-k}$. De esta forma, los recubrimientos tienen lado menor que $\delta = 2^{-k}$, coincidiendo así las medidas como se dijo al principio.

La propiedad de que se trate de una red de medidas se obtiene considerando una familia de recubrimientos de E a partir de conjuntos disjuntos de $\mathcal{N}$, que se obtienen como ya se indicó anteriormente.

Definición 4.2.3. *Se define la medida $\mathcal{M}^s(E)$ como*

$$\mathcal{M}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{M}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{M}^s_\delta(E) \tag{4.11}$$

A continuación vamos a probar que la medida que hemos definido se trata de una medida exterior. Para ello bastará con probar que se cumplen las propiedades de la Definición 2.2.1: la medida del vacío es nula, así como las propiedades de monotonía y subaditividad entre conjuntos.

Proposición 4.2.4. *Sean $\delta > 0$ y $s > 0$. $\mathcal{M}^s_\delta$ y $\mathcal{M}^s$ son medidas exteriores en $\mathbb{R}^d$.*

Demostración. Para desarrollar la prueba, veremos si se satisfacen las tres condiciones que se dieron en la definición de medida exterior (Definición 2.2.1.)

1. Se tiene que

$$\mathcal{M}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \to 0} \inf \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^s \leq |\emptyset|^s = 0$$

   Como, por definición, $\mathcal{M}^s$ es no negativa, se tiene que $\mathcal{M}^s(\emptyset) = 0$.

2. Supongamos $E_1 \subset E_2$. Evidentemente, todo recubrimiento de E_2 cuyos elementos tengan lado menor que δ lo es también de E_1. En otras palabras, queremos decir que el conjunto de recubrimientos para E_2 está contenido en el de recubrimientos para E_1, por lo que al ser el segundo conjunto mayor es posible que el ínfimo de la suma de diámetros de entre todos los recubrimientos se alcance en un valor más bajo. Por tanto,

$$\inf \sum_{i=1}^{\infty} |S_i|^s \leq \inf \sum_{i=1}^{\infty} |S_i'|^s$$

   siendo $\{S_1\}$ una familia de recubrimientos de E_2 y $\{S_i'\}$ de E_1. Gracias a la definición, la desigualdad anterior es lo mismo que decir

$$\mathcal{M}^s_\delta(E_1) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E_2).$$

   Haciendo δ tender a 0, se tiene que $\mathcal{M}^s(E_1) \leq \mathcal{M}^s(E_2)$, como se quería probar.

3. Por último, probamos que

$$\mathcal{M}^s(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}^s(E_j)$$

   Sea δ fijo, seleccionamos para cada E_j un recubrimiento $\{S_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ de forma que $\ell(S_{j,k}) \leq \delta$ para todo valor de j y de k y, que para todo $\varepsilon > 0$ se verifique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(S_{j,k})^s \leq \mathcal{M}^s_\delta(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Como $\{S_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una familia de recubrimientos de diámetro menor que δ, y $\mathcal{M}_\delta^s$ es el ínfimo de una suma entre todas las familias de recubrimientos verificando esa propiedad, se tiene que

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) + \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, hacemos que tienda a 0, de forma que conseguimos la desigualdad

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}^s(E_j).$$

Por último, hallando el límite cuando $\delta \to 0$, se tiene

$$\mathcal{M}^s(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}^s(E_j)$$

Con estos tres puntos, queda demostrado que la medida que hemos definido se trata de una medida exterior.

$\square$

Proposición 4.2.5. $\mathcal{M}^s$ *es una medida exterior métrica.*

Demostración. Hay que probar que si E y F son dos conjuntos distantes, entonces se tiene que

$$\mathcal{M}^s(E \cup F) = \mathcal{M}^s(E) + \mathcal{M}^s(F).$$

La desigualdad $\leq$ se tiene gracias a la subaditividad de la medida, por lo que bastará probar la otra.

Como los conjuntos son distantes, podemos considerar un $\varepsilon > 0$ de forma que $d(E, F) > \operatorname{diam}(S)$ para todo cubo S de lado menor o igual que ε. Sea $\delta \in (0, \varepsilon)$, consideramos un recubrimiento de $E \cup F$ al que vamos a denotar por $\{U_i\}_{i \geq 0}$ de forma que $\ell(U_i) \leq \delta < \varepsilon$ para todo valor de i. De esta forma, si algún U_i corta a E, ese mismo elemento del recubrimiento no corta a F. Por tanto, podemos considerar lo siguientes conjuntos

$$J_1 = \{i \in \mathbb{N} : U_i \cap E \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad J_2 = \{i \in \mathbb{N} : U_i \cap F \neq \emptyset\}.$$

De esta forma $\{U_i\}_{i\in J_1}$ es un recubrimiento para E verificando $\ell(U_i) \leq \delta$ y $\{U_i\}_{i\in J_2}$ es un recubrimiento para F con la misma propiedad para el lado de cada elemento. Por tanto, se tiene que

$$\mathcal{M}^s_\delta(E) + \mathcal{M}^s_\delta(F) \leq \sum_{i\in J_1} \ell(U_i)^s + \sum_{i\in J_2} \ell(U_i)^s \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(U_i)^S.$$

Si consideramos el ínfimo de entre todos los recubrimientos para la unión y, posteriormente, tomamos límite cuando δ tiende a 0, tenemos la desigualdad deseada

$$\mathcal{M}^s(E) + \mathcal{M}^s(F) \leq \mathcal{M}^s(E \cup F).$$

Junto a la igualdad que se tenía por la subaditividad de la medida, se concluye la prueba de la proposición. $\square$

La necesidad de construir una nueva medida recordamos que se debía a que buscábamos ciertas propiedades o mejoras en su comportamiento pero, sin olvidar, que el centro de nuestro estudio son las medidas de Hausdorff. Por ello, es necesario detenerse en el siguiente resultado en el que se muestra la equivalencia de ambas medidas, de forma que podemos entender que una siempre está controlada por la otra y, viceversa. Enunciaremos y demostraremos previamente un lema que será necesario para la prueba del teorema del que hablamos.

Lema 4.2.6. *Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que todo subconjunto U de $\mathbb{R}^d$ con $\operatorname{diam} U \leq 2$ está recubierto por, a lo más, M cubos $S_1, \ldots, S_M \in \mathcal{N}_0$.*

Demostración. Consideramos la proyección f_j^* para todo $j = 1, \ldots, d$ definida como sigue

$$\begin{aligned} f_j^* : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_d) &\longmapsto x_j. \end{aligned}$$

Como se trata de una transformación lineal, existe una constante $\beta > 0$ de forma que

$$|f_j^*(x)| \leq \beta \|x\|, \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, d \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Como, por hipótesis, $\operatorname{diam} U \leq 2$, se tendrá que

$$\sup\{|f_j^*(x) - f_j^*(y)| : x, y \in U\} \leq 2 \cdot \beta.$$

Por tanto, si $U \subset \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$ siendo a_j y b_j los siguientes valores

$$\begin{aligned} a_j &= \inf\{f_j^*(x) : x \in U\} \\ b_j &= \sup\{f_j^*(x) : x \in U\}, \end{aligned}$$

se tendrá necesariamente que $|b_j - a_j| \leq 2 \cdot \beta$. Este hecho implica que $[a_j, b_j]$ está incluido en, a lo más, $2 + (b_j - a_j)$ intervalos de la forma $[m, m+1)$ con $m \in \mathbb{Z}$. Tomando los productos de estos intervalos, tenemos que

$$\prod_{j=1}^{d} (2 + (b_j - a_j)) \leq (2 + 2\beta)^d = M.$$

Consecuentemente, U está contenido en, como mucho, M cubos diádicos de lado menor o igual que 1, es decir, cubos diádicos pertenecientes a $\mathcal{N}_0$. □

Teorema 4.2.7. *Fijada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$, consideramos las medidas $\mathcal{H}^s_\delta$ y $\mathcal{H}^s$ con respecto a la distancia inducida por la norma. Entonces, existen dos constantes α y M de forma que para todo $s \in (0, d)$, todo número $\delta \in (0, 1)$ y todo $E \subset \mathbb{R}^d$ se tiene que*

$$\alpha^{-s} \mathcal{H}^s_{\alpha\delta}(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E) \leq M \mathcal{H}^s_\delta(E). \tag{4.12}$$

Consecuentemente,

$$\alpha^{-s} \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{M}^s(E) \leq M \mathcal{H}^s(E). \tag{4.13}$$

Demostración. Cabe señalar que en todo momento, cuando escribamos el diámetro de un conjunto, nos referiremos a aquel inducido por la norma que se da en el enunciado.

Comenzamos probando la primera desigualdad. Sea

$$\operatorname{diam}([0,1)^d) = \alpha \in (0, +\infty).$$

Como cualquier cubo se puede obtener a partir del anterior mediante traslaciones y homotecias, tenemos que

$$\operatorname{diam}(S) = \ell(S)\alpha \quad \text{para todo } S \in \mathcal{N}. \tag{4.14}$$

Consideramos ahora un recubrimiento de E al que denotamos por $\{S_i\}_{i \geq 1}$ de forma que para todo valor de i se tiene que $\ell(S_i) \leq \delta$. Gracias a la expresión 4.14, tenemos que

$$\operatorname{diam}(S_i) = \ell(S_i)\alpha \leq \delta \cdot \alpha.$$

Por tanto, como $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty S_i$, se tiene que

$$\mathcal{H}^s_{\alpha\delta}(E) \leq \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(S_i)^s = \sum_{i=1}^\infty \ell(S_i)^s \alpha^s.$$

Tomando ínfimo entre todos los recubrimientos llegamos a que

$$\alpha^{-s} \mathcal{H}^s_{\alpha\delta}(E) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E).$$

Para la segunda desigualdad, utilizaremos el Lema 4.2.6. Por dicho resultado tenemos que, si $\operatorname{diam}(U) \leq 2 \cdot 2^{-k}$, entonces U está recubierto por, a lo más, M cubos diádicos pertenecientes a $\mathcal{D}_k$.

Tomamos un recubrimiento cualquiera de E al que denotamos por $\{U_j\}_{j\geq 1}$ de forma que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$$

con $\operatorname{diam}(U_j) \in [2^{-k_j}, 2^{-k_j+1})$ y $\operatorname{diam}(U_j) \leq \delta$ para todo valor de j, por lo que se tiene gracias a las dos condiciones impuestas que

$$2^{-k_j} \leq \operatorname{diam}(U_j) \leq \delta.$$

Utilizando la afirmación que nos da el Lema 4.2.6, para cada U_j consideramos ahora recubrimiento finito por cubos diádicos pertenecientes a $\mathcal{D}_{k_j}$, teniéndose, por tanto, que

$$U_j \subset \bigcup_{l=1}^{M} S_{j,l}$$

con $S_{j,l} \in \mathcal{D}_{k_j}$.

De esta forma, tenemos que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{M} S_{j,l}$ y, consecuentemente,

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{M} \ell(S_{j,l})^s \leq \sum_{j=1}^{\infty} (2^{-k_j})^s \cdot M \leq M \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_j)^s.$$

Como el razonamiento es válido para todo recubrimiento de E, tomamos ínfimo y obtenemos la desigualdad que queríamos probar

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq M \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

□

A partir de este momento se expondrán una serie de lemas que serán necesarios para cumplir el objetivo de esta capítulo, que no es otro que demostrar el Teorema 4.1.3.

Lema 4.2.8. *Sea $\{E_j\}$ una sucesión decreciente de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$. Para cualquier $\delta > 0$ se tiene que*

$$2^s \mathcal{H}_\delta^s(\lim_{j\to\infty} E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}_{2\delta}^s(E_j) \tag{4.15}$$

Demostración. Sea $E = \lim\limits_{j\to\infty} E_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$.

Consideramos $\{U_i\}$ cualquier δ-recubrimiento de E. Para cada i consideramos un abierto V_i conteniendo a U_i de forma que $\operatorname{diam} V_i \leq 2 \operatorname{diam} U_i$ y denotamos por V al abierto $\bigcup_i V_i$. De esta forma,

$$E \subset \bigcup_i U_i \subset \bigcup_i V_i = V$$

y, por tanto, $\{V_i\}$ es un 2δ-recubrimiento del conjunto E.

Podemos comprobar que para algún entero j, $E_j \subset V$. En caso contrario, si observamos la familia $\{E_j \backslash V\}$, vemos que se trata de una sucesión decreciente de compactos no vacíos que, por argumentos de compacidad, tiene una intersección no vacía. Por tanto,

$$\emptyset \neq \bigcap_{j\geq 0} (E_j \setminus V) = (\bigcap_{j\geq 0} E_j) \setminus V = E \setminus V,$$

lo que contradice al hecho de que $E \subset V$. Por tanto, concluimos que para algún valor de j se tiene que $E_j \subset V$.

Con todo esto tenemos que

$$2^s \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^s \geq \sum_i \operatorname{diam}(V_i)^s \geq \mathcal{H}^s_{2\delta}(E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_{2\delta}(E_j)$$

Como esta cadena de desigualdades se tiene para cualquier δ-recubrimiento de E, tomando ínfimo de entre todos los recubrimientos obtenemos el resultado que se quería probar:

$$2^s \mathcal{H}^s_\delta(\lim_{j\to\infty} E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_{2\delta}(E_j).$$

$\square$

Observación 4.2.9. El resultado anterior se puede mejorar si $\beta > \delta$, pongamos por ejemplo $\beta = (1+r)\delta$ con $r > 0$, e imponiendo que $|V_i| \leq (1+\epsilon)|U_i|$ para cierto $\varepsilon \in (0, r)$ De esta forma se tendrá que

$$(1+\varepsilon)^s \mathcal{H}^s_\delta(\lim_{j\to\infty} E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_{(1+\varepsilon)\delta}(E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_\beta(E_j).$$

Haciendo tender ε a 0 llegamos a que si $\beta > \delta$,

$$\mathcal{H}^s_\delta(\lim_{j\to\infty} E_j) \geq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_\beta(E_j).$$

Lema 4.2.10. *Sean $\delta = 2^{-k}$ y $0 < s < d$. Si E es unión finita de cubos diádicos, es decir,*

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j \qquad \text{con } Q_j \in \mathcal{N}, \tag{4.16}$$

entonces existe una colección finita $\{D_1, \ldots, D_m\}$ de cubos en $\mathcal{N}_k$ tales que

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) = \sum_{j=1}^{m} \ell(D_j)^s. \tag{4.17}$$

Demostración. Comenzamos haciendo dos observaciones fundamentales que serán necesarias a lo largo de la prueba.

En primer lugar, podemos suponer que para todo valor de j se tiene $Q_j \in \mathcal{N}_k$. Esto se debe a que si $Q_j \in \mathcal{D}_l$ con $0 \leq l < k$, entonces Q_j es unión disjunta de $2^{d(k-l)}$ cubos en $\mathcal{D}_k$.

Por otra parte, como $Q_j \in \mathcal{N}$, podemos utilizar argumentos de maximalidad y suponer que los cubos Q_j son dos a dos disjuntos.

Comenzamos ahora con lo que sería la prueba del lema. Para ello, comenzamos llamando $\mathcal{A}$ a la siguiente familia:

$$\mathcal{A} = \{Q \in \mathcal{N}_k : \text{ existe un } j \in \{0, \ldots, n\} \text{ con } Q_j \subset Q\}. \tag{4.18}$$

Como hay un número finito de Q_j, se trata de una familia finita. Vamos a probar que si $\mathcal{S} = \{S_j\}_{j \geq 1}$ es un recubrimiento de E en $\mathcal{N}_k$, existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ de forma que

1. $\mathcal{U}$ es un recubrimiento de E.
2. $$\sum_{Q \in \mathcal{U}} \ell(U)^s \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(S_j)^s.$$

De esos dos puntos se deduce que

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) = \text{ínf}\{\sum_{Q \in \mathcal{U}} \ell(S)^s : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \text{ con } \mathcal{U} \text{ recubrimiento de } E\}, \tag{4.19}$$

pero como la familia $\mathcal{A}$ es finita, ese ínfimo es realmente un mínimo, por lo que se tendría probado el lema. Vamos a probar, por tanto, los dos puntos que se enumeraron anteriormente. Podemos suponer que la familia $\mathcal{S}$ es una colección de cubos dos a dos disjuntos y, además, $S_j \cap E \neq \emptyset$ para todo valor de j.

Sea $\mathcal{S}_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}_0$ no recubre a E, significa que existe al menos un punto $x \in E$ de forma que $x \notin \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S$. Por tanto, existe un valor de j de forma que

$$Q_j \not\subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S. \tag{4.20}$$

Sea ahora $S \in \mathcal{S}_0$. Si $Q_j \cap S \neq \emptyset$, existen dos posibilidades. En primer lugar, que $Q_j \subset S$, de forma que tendríamos una contradicción con 4.20. O, por otra parte, que $S \subset Q_j$. Esto significaría que existe un l de forma que $Q_l \subset S \subset Q_j$, lo que resulta una contradicción con el hecho de que los intervalos Q_j eran dos a dos disjuntos. Por tanto, podemos concluir que $Q_j \cap S = \emptyset$ para $S \in \mathcal{S}_0$.

Consideramos ahora el conjunto $\mathcal{S}_j$ definido como

$$\mathcal{S}_j = \{S \in \mathcal{S} : Q_j \cap S \neq \emptyset\}, \tag{4.21}$$

de forma que $S \subset Q_j$ para todo $S \in \mathcal{S}_j$, y, además,

$$Q_j = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}_j} S. \tag{4.22}$$

Con todo eso tenemos que

$$\ell(Q_j)^d = m_d(Q_j) = \sum_{S \in \mathcal{S}_j} \ell(S)^d < \sum_{S \in \mathcal{S}_j} \ell(S)^s \ell(Q_j)^{d-s}, \tag{4.23}$$

de donde se deduce, si dividimos en ambos términos de la desigualdad entre $\ell(Q_j)^{d-s}$, que

$$\ell(Q_j)^s < \sum_{S \in \mathcal{S}_j} \ell(S)^s. \tag{4.24}$$

De esta forma, sustituyendo $\mathcal{S}_j$ por $\{Q_j\}$ en $\mathcal{S}$, obtenemos un recubrimiento $\mathcal{S}'$ en el que

$$\sum_{S \in \mathcal{S}'} \ell(S)^s \leq \sum_{S \in \mathcal{S}} \ell(S)^s \tag{4.25}$$

y en el que un nuevo Q_j está recubierto, además de por lo anterior, por $\mathcal{S}'_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{S}'$. Repitiendo el proceso con todos los Q_j que sean necesarios se obtienen los dos puntos que se enunciaron anteriormente y, con ello, la prueba del lema.

□

Lema 4.2.11. *Sea $\{E_j\}$ una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ de forma que cada uno de ellos es unión finita de cubos diádicos. Sea $0 < s < d$. Entonces*

$$\mathcal{M}_\delta^s(\lim_{j \to \infty} E_j) = \lim_{j \to \infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) \tag{4.26}$$

Demostración. Denotemos por E al límite $\lim_{j\to\infty} E_j$ que, al tratarse de una sucesión creciente se satisface que el valor de dicho límite es

$$E = \lim_{j\to\infty} E_j = \bigcup_j E_j.$$

Como $E_j \subset E$ para todo valor de j, es inmediato gracias a la monotonía de la medida para conjuntos que

$$\mathcal{M}^s_\delta(E_j) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E)$$

Por tanto, al hacer tender j a ∞ obtenemos una de las desigualdades deseadas:

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j) \leq \mathcal{M}^s_\delta(\lim_{j\to\infty} E_j).$$

Luego basta probar la desigualdad contraria, suponiendo que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_j) < +\infty$.

Gracias al Lema 4.2.10, como E_j es unión finita de cubos diádicos, el ínfimo de la definición de la medida $\mathcal{M}^s_\delta(E_j)$ se alcanza en alguna colección finita de cubos diádicos. Por llamarlos de alguna forma, supongamos que para cada j, $\mathscr{S}_j$ es una familia de recubrimientos de E_j con $\ell(E_j) \leq \delta$ para todo valor de j, de forma que verifica

$$\sum_{C\in\mathscr{S}_j} \ell(C)^s = \mathcal{M}^s_\delta(E_j). \tag{4.27}$$

Además, podemos suponer que se trata de una de las colecciones con menor número de intervalos diádicos que verifican esa propiedad.

Ahora bien, si $S \in \mathscr{S}_j$, debe existir un punto de E contenido también en S. Si no fuera así, S sobraría en la familia $\mathscr{S}_j$, y la colección de intervalos diádicos podría ser menor. Como la sucesión de conjuntos $\{E_j\}_{j\geq 1}$ es creciente, este mismo punto pertenece también a algún conjunto T de la etapa $\mathscr{S}_{j+1}$, es decir, a algún elemento del recubrimiento de E_{j+1}. Con ello tenemos que $S \cap T \neq \emptyset$, por lo que si recordamos la propiedad de la red de medidas que se expuso al principio del capítulo, o bien $S \subset T$ o, por el contrario, $T \subset S$.

Supongamos, por ejemplo, que $T \subset S$. En ese caso, podemos sustituir S por los cubos diádicos de $\mathscr{S}_{j+1}$ que estén contenidos en S con el objetivo de reducir la suma $\sum_{C\in\mathscr{S}_j} \ell(S)^s$ o, en otro caso, reemplazar los cubos de $\mathscr{S}_{j+1}$ que están contenidos en S por el cubo S únicamente. La finalidad de esta última opción sería reducir la suma $\sum_{C\in\mathscr{S}_{j+1}} \ell(S)^s$ o el número de sumandos que aparecen en ella. Esto último supone una contradicción con el hecho que se resaltó al principio: $\mathscr{S}_j$ era una de las familias de menor número de elementos que cumplían la propiedad 4.27. Por tanto, al no ser esta opción la válida, podemos concluir que si $S \in \mathscr{S}_j$, existe $T \in \mathscr{S}_{j+1}$ de forma que $S \subset T$.

Sea ahora $\{C_1, C_2, \cdots\}$ el conjunto maximal de cubos obtenido a partir de $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{S}_j$ excluyendo aquellos cubos que estuvieran contenidos en cualquier otro de la familia. Por tanto, $E_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ para todo $j \geq 1$ y, como consecuencia,

$$E = \bigcup_{j \geq 1} E_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Debido a la monotonía de la medida sobre conjuntos, tenemos que

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \ell(C_i)^s = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \ell(C_i)^s. \tag{4.28}$$

Gracias a las conclusiones que hemos sacado en el razonamiento anterior, podemos asegurar que cada C_i pertenece a algún $\mathscr{S}_j$, pero como C_i es maximal en $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{S}_j$, si $C_i \subset T \in \mathscr{S}_{j+1}$, se tendría que $T = C_i \in \mathscr{S}_{j+1}$, y así, $C_i \in \mathscr{S}_l$ para todo $l \geq j$. Por tanto, dado k, podemos encontrar $j(k)$ de forma que los cubos $C_1, C_2, \cdots, C_k$ pertenezcan a $\mathscr{S}_{j(k)}$.

Haciendo uso de las expresiones 4.27 y 4.28, se tiene que

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \ell(C_i)^s \leq \lim_{k \to \infty} \sum_{C \in \mathscr{S}_{j(k)}} \ell(C)^s = \lim_{k \to \infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_{j(k)}) \leq \lim_{j \to \infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j),$$

consiguiendo de esta forma la desigualdad que faltaba por probar.

Reuniendo ambas expresiones conseguimos la igualdad del enunciado. □

El siguiente par de resultados se trata de dos lemas técnicos necesarios para probar el teorema que les sigue.

Lema 4.2.12. *Sea el conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, $0 < s < d$ y $\delta = 2^{-k}$ tal que $\mathcal{M}_\delta^s(E) < +\infty$. Entonces existe una sucesión finita o numerable $\{Q_m\}_{m \geq 1}$ en $\mathscr{N}_k$ verificando:*

1. $\mathcal{M}_\delta^s(E \setminus (\bigcup_m Q_m)) = 0$
2. $\mathcal{M}_\delta^s(E \cap Q_m) > (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(Q_m)$ *para todo* $m \geq 1$.
3. $\{Q_m\}_{m \geq 1}$ *es una sucesión de elementos dos a dos disjuntos.*

Demostración. Sea el conjunto $\mathcal{S}$ el definido como

$$\mathcal{S} = \{Q \in \mathscr{N}_k : \mathcal{M}_\delta^s(Q \cap E) > (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(Q)\},$$

y tomamos como $\{Q_m\}_{m\geq 1}$ el conjunto de elementos maximales de $\mathcal{S}$.

Por el hecho de ser maximales, nuestra sucesión de conjuntos verifica la condición 3 del enunciado. Además, como hemos tomado un subconjunto de $\mathcal{S}$, sus elementos siguen satisfaciendo la propiedad que se exige en la definición de $\mathcal{S}$, por lo que verifican también la segunda propiedad del enunciado. Por tanto, bastará demostrar la primera condición del lema.

Sea un punto cualquiera $x \in E \setminus \bigcup_m Q_m$. Entonces, se tiene que

$$\mathcal{M}_\delta^s(Q \cap E) \leq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(Q), \qquad \text{para todo } Q \in \mathscr{N}_k \text{ con } x \in Q.$$

En caso de que no fuera así y se cumpliera la desigualdad contraria, Q pertenecería al conjunto $\mathcal{S}$ y, en particular, x estaría en alguno de los elementos maximales de $\mathcal{S}$, lo que supone una contradicción.

Denotamos ahora por R a $E \setminus \bigcup_{m\geq 1} Q_m$, siendo nuestro objetivo en todo momento calcular $\mathcal{M}_\delta^s(R)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de cubos diádicos $\{I_j\}_{j\geq 1}$ en $\mathscr{N}_k$ tal que

$$R \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j \quad \text{ y } \quad \varepsilon + \mathcal{M}_\delta^s(R) > \sum_{j\geq 1} \mathcal{M}_\delta^s(I_j).$$

Además, podemos suponer que $R \cap I_j \neq \emptyset$ para todo $j \geq 1$ pues, en caso de que la intersección sea vacía con algún I_j, eliminamos ese conjunto de la unión y el recubrimiento de R sigue siendo el mismo.

De esta última observación podemos garantizar que para todo valor de j existe un elemento $x_j \in R \cap I_j$. Como teníamos que $R = E \setminus \cup_m Q_m$, se tiene que

$$\mathcal{M}_\delta^s(I_j \cap E) \leq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(I_j).$$

Además, como $R \subset E$, ocurre lo mismo al intersecar ambos conjuntos con I_j, por lo que

$$\mathcal{M}_\delta^s(I_j \cap R) \leq \mathcal{M}_\delta^s(I_j \cap E)$$

gracias a la monotonía de la medida. En definitiva, tenemos que

$$\mathcal{M}_\delta^s(I_j \cap R) \leq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(I_j).$$

Con todo ello llegamos a que

$$(1-\delta)(\varepsilon + \mathcal{M}_\delta^s(R)) > \sum_{j\geq 1}(1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(I_j) \geq \sum_{j\geq 1}\mathcal{M}_\delta^s(I_j \cap R) \geq \mathcal{M}_\delta^s(R),$$

debiéndose la última desigualdad a que si R está contenido en la unión de los I_j, en particular está contenido en la unión de los conjuntos $I_j \cap R$. Utilizando la subaditividad de la medida se tiene la desigualdad que aparece arriba.

Haciendo ε tender a 0, llegamos a que $(1-\delta)\mathcal{M}^s_\delta(R) \geq \mathcal{M}^s_\delta(R)$. Como $1-\delta < 1$, se tiene necesariamente que $\mathcal{M}^s_\delta(R) = 0$, puesto que $\mathcal{M}^s_\delta(R) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E) < +\infty$ por hipótesis. Con esto damos por concluida la prueba del lema.

□

Lema 4.2.13. *Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ y $\delta = 2^{-k}$. Si $\{Q_m\}_{m\geq 1}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{N}_k$, dos a dos disjuntos y de forma que verifican*

$$\mathcal{M}^s_\delta(A \cap Q_m) \geq (1-\delta)\mathcal{M}^s_\delta(Q_m), \qquad \textit{para todo } m \geq 1$$

se tiene que

$$\mathcal{M}^s_\delta(A) \geq (1-\delta)\mathcal{M}^s_\delta(\bigcup_{m\geq 1} Q_m).$$

Demostración. Comenzamos suponiendo que $\mathcal{M}^s_\delta(A) < +\infty$ pues, en caso contrario, el resultado se tendría de inmediato.

Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que existe una sucesión en $\mathcal{N}_k$ a la que vamos a llamar $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de forma que

$$A \subset \bigcup_{n\geq 1} I_n \quad \text{y} \quad \mathcal{M}^s_\delta(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^s_\delta(I_n).$$

Como se ha razonado en diversas ocasiones, es posible tomar la sucesión $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de forma que sus elementos sean dos a dos disjuntos. Para ello, basta tomar conjuntos maximales. Además, podemos suponer que cada uno de esos conjuntos es no vacío.

Consideramos ahora el conjunto de índices J_1 definido de la siguiente forma:

$$J_1 = \{m \in \mathbb{N} : \text{ existe } n \geq 1 \text{ con } Q_m \subset I_n\}.$$

Sea también la unión disjunta $X = \bigsqcup Q_m = X_1 \bigsqcup Y$ donde

$$X_1 = \bigsqcup_{m\in J_1} Q_m \quad \text{y} \quad Y = \bigsqcup_{m\notin J_1} Q_m.$$

Definimos el conjunto L como

$$L = \{n \in \mathbb{N} : \text{ existe } m \in J_1 \text{ con } Q_m \subset I_n\},$$

de forma que se tiene la relación

$$X_1 = \bigsqcup_{m \in J_1} Q_m \subset \bigsqcup_{n \in L} I_n = A_1.$$

Para terminar con todos estos conceptos previos, sea $m \notin J_1$, definimos el conjunto C_m como

$$C_m = \{n \in \mathbb{N} : I_n \subset Q_m\}.$$

Veamos ahora que la intersección del conjunto C_m con L es igual al vacío.

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ de forma que $n \in L \cap C_m$. Como $n \in C_m$, se tiene en primer lugar que $I_n \subset Q_m$. Por otra parte, como $n \in L$, significa que existe un $k \in J_1$ de forma que $Q_k \subset I_n$. De los dos resultados obtenidos tenemos que $Q_k \subset Q_m$. Como estos elementos pertenecen a una familia de conjuntos dos a dos disjuntos, se tiene necesariamente que $k = m$ y, por tanto,

$$Q_k = I_n = Q_m.$$

Esto implica directamente que $m \in J_1$, lo que supone una contradicción con la hipótesis utilizada para definir C_m. Por tanto, concluimos que $L \cap C_m = \emptyset$.

En segundo lugar, vamos a ver que los conjuntos de la forma de C_m son dos a dos disjuntos. En concreto, si $m \neq m'$ y $m, m' \notin J_1$, entonces $C_m \cap C_{m'} = \emptyset$.

Al igual que en caso anterior, razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $r \in \mathbb{N}$ de forma que $r \in C_m \cap C_{m'}$ con m y m' en las condiciones anteriores. En ese caso, por la definición de ambos conjuntos, se tendría que

$$I_r \subset Q_m \quad \text{y} \quad I_r \subset Q_{m'}.$$

Como $Q_m \cap Q_{m'} = \emptyset$ si $m \neq m'$, se tiene necesariamente que I_r es igual al vacío, lo que supone una contradicción con la hipótesis de que los conjuntos de esta forma se tomaban no vacíos. Por consiguiente, tenemos que los conjuntos de la forma de C_m son dos a dos disjuntos.

A continuación vamos a probar que, si $m \notin J_1$, se tiene que

$$A \cap Q_m \subset \bigcup_{n \in C_m} I_n.$$

Para ello, sea $x \in A \cap Q_m$. Como $x \in A$ y este conjunto se encuentra recubierto por la unión de los I_n, se tiene que $x \in \bigcup_n I_n$. En particular, existe un n tal que $x \in I_n$. Como debido a la intersección inicial se tiene también que $x \in Q_m$ e I_n y Q_m son dos intervalos diádicos que se cortan, existen dos posibilidades.

Una de los casos es que $Q_m \subset I_n$. De ser así, se tendría que $m \in J_1$, lo que supone una contradicción con una de nuestras hipótesis. Por tanto, ha de darse la segunda posibilidad: $I_n \subset Q_m$. En este caso $n \in C_m$ y, como $x \in I_n$, podemos concluir que

$$x \in \bigcup_{n \in C_m} I_n.$$

Como x se trataba de un elemento genérico del primer conjunto, afirmamos que

$$A \cap Q_m \subset \bigcup_{n \in C_m} I_n$$

siempre que $m \notin J_1$.

Recapitulando toda la información que tenemos nos disponemos a concluir la prueba del lema.

En primer lugar, teníamos por hipótesis que

$$\mathcal{M}_\delta^s(A) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_\delta^s(I_n).$$

Este último sumatorio vamos a separarlo en otros dos teniendo en cuenta, por un lado, los índices n que pertenecen a L y, por otra parte, aquellos que no pertenecen a J_1. Si el índice pertenece a L significa de inmediato que existe otro índice perteneciente a J_1 verificando las condiciones que se detallaron en las definiciones. En el otro caso, si el índice no pertenece a J_1, contaremos aquellos que estén en C_m. La cota quedaría de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_\delta^s(I_n) \geq \sum_{n \in L} \mathcal{M}_\delta^s(I_n) + \sum_{m \notin J_1} \sum_{n \in C_m} \mathcal{M}_\delta^s(I_n).$$

Utilizando la definición de X_1 para el primer sumando y la subaditividad de la medida para $A \cap Q_m \subset \cup_{n \in C_m} I_n$ para el segundo, tenemos que

$$\sum_{n \in L} \mathcal{M}_\delta^s(I_n) + \sum_{m \notin J_1} \sum_{n \in C_m} \mathcal{M}_\delta^s(I_n) \geq \mathcal{M}_\delta^s(X_1) + \sum_{m \notin J_1} \mathcal{M}_\delta^s(A \cap Q_m) \geq$$
$$\geq \mathcal{M}_\delta^s(X_1) + (1-\delta) \sum_{m \notin J_1} \mathcal{M}_\delta^s(Q_m),$$

utilizándose en la última desigualdad la hipótesis de nuestro lema.

Por último, haciendo uso de la subaditividad de la medida llegamos a que

$$\mathcal{M}_\delta^s(X_1) + (1-\delta)\sum_{m\notin J_1} \mathcal{M}_\delta^s(Q_m) \geq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(X_1) + (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(Y) \geq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(X).$$

Encadenando todas las desigualdades obtenidas llegamos a

$$\mathcal{M}_\delta^s(A) + \varepsilon \geq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(X).$$

Como el valor de ε es arbitrario, hacemos que tienda a 0 y, de esta forma, conseguimos la desigualdad deseada. □

En el Lema 4.2.11 se demostraba que el límite de una unión creciente de conjuntos era el límite de la medida de dichos conjuntos siempre que cada uno de ellos se tratara, a su vez, de una unión finita de cubos diádicos. En el resultado que vamos a probar a continuación no exigiremos esa última condición sobre los elementos de la unión, por lo que se trata de un enunciado más general. Para ello, nos apoyaremos, tal y como se indicó anteriormente, en los lemas que hemos demostrado hasta ahora.

Teorema 4.2.14. *Sean $\delta = 2^{-k}$, $0 < s < d$ y $\{E_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión creciente de conjuntos de forma que $E = \bigcup_{j=1}^\infty E_j$. Entonces,*

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j). \tag{4.29}$$

Demostración. La desigualdad $\geq$ es casi inmediata. Si se tiene E definido como en el enunciado, en particular, para todo valor de j se tendrá que $E_j \subset E$. Por monotonía de la medida, tendremos que $\mathcal{M}_\delta^s(E_j) \leq \mathcal{M}_\delta^s(E)$. Tomando límite cuando j tiende a ∞ se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E) = \mathcal{M}_\delta^s(E).$$

Para la desigualdad opuesta, tomamos $0 < \delta < 1$ y definimos el conjunto $\mathcal{S}$ como sigue:

$$\mathcal{S} = \{Q \in \mathcal{D}_k : \text{ existe } j \geq 1 \text{ con } \mathcal{M}_\delta^s(Q \cap E_j) \geq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(Q)\}.$$

Cabe señalar que si existe algún j verificando esa condición, cualquier índice mayor que j también la verifica al tratarse de una unión creciente de conjuntos la de los E_j.

Sea ahora $X = \bigcup_{Q\in S} Q$, de forma que, gracias al primer apartado del Lema 4.2.12, se tiene

$$\mathcal{M}_\delta^s(E_j \setminus X) = 0, \qquad \text{para todo } j \geq 1.$$

Consecuentemente, también se tiene que

$$\mathcal{M}_\delta^s(E \setminus X) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathcal{M}_\delta^s(E_j \setminus X) = 0,$$

por lo que $\mathcal{M}_\delta^s(E \setminus X) = 0$. Esto nos permite suponer que $E \subset X$, puesto que la medida de la diferencia $E \setminus X$ es nula.

Tomamos a partir de $\mathcal{S}$ la familia de los conjuntos maximales, a la que vamos a denotar por $\mathcal{S}_0$. Esto es posible ya que, como bien sabemos, si dos conjuntos se cortan uno debe estar contenido en el otro necesariamente. En ese caso, nos quedamos con el mayor de ambos. Con esta nueva familia conseguimos que los conjuntos sean dos a dos disjuntos y que la unión siga siendo la misma que antes, es decir,

$$\mathcal{S}_0 = \{Q_m\}_{m\geq 1} \quad \text{con} \quad Q_m \cap Q_{m'} = \emptyset \text{ si } m \neq m' \quad \text{y} \quad X = \bigcup_{m\geq 1} Q_m.$$

Sea ahora $F_m = \bigcup_{j=1}^m Q_m$ de forma que $X = \bigcup_{m=1}^\infty F_m$. Gracias al Lema 4.2.11, tenemos que

$$\mathcal{M}_\delta^s(X) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(F_m),$$

de forma que, como $E \subset X$, llegamos a

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \mathcal{M}_\delta^s(X) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(F_m).$$

Ahora bien, fijado m, existe un valor de j_0 de forma que

$$\mathcal{M}_\delta^s(Q_l \cap E_{j_0}) \geq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(Q_l), \quad \text{para todo } l = 1, \dots, m.$$

De esta forma,

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j) \geq \mathcal{M}_\delta^s(E_{j_0}) \geq (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s\Big(\bigcup_{l=1}^m Q_l\Big) = (1-\delta)\mathcal{M}_\delta^s(F_m),$$

utilizándose en la segunda desigualdad el Lema 4.2.13. Por tanto, esto es equivalente a decir

$$\mathcal{M}_\delta^s(F_m) \leq \frac{\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j)}{1-\delta}.$$

Como el valor de δ era arbitrario, hacemos que tienda a 0 y, tomando posteriormente límite cuando m tiende a ∞ llegamos a

$$\mathcal{M}_\delta^s(E) \leq \lim_{m\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(F_m) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_\delta^s(E_j),$$

que era la desigualdad que quedaba por probar. $\square$

Lema 4.2.15. *Sean $0 < s < d$ y un compacto $E \subset \mathbb{R}^d$. Entonces se tiene que*

$$\mathcal{M}_{2^{-k}}^s(E) = \sum_{I\in\mathcal{D}_k} \mathcal{M}_{2^{-k}}^s(E \cap I). \tag{4.30}$$

Demostración. En primer lugar, como $E \subset \bigcup_{I\in\mathcal{D}_k}(E\cap I)$, la desigualdad $\leq$ se tiene gracias a la subaditividad de la medida.

Para la otra desigualdad es necesario observar previamente que la suma es finita, puesto que E es acotado y sólo corta a un número finito de cubos diádicos de lado 2^{-k}.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos un recubrimiento $\{Q_m\}_{m\geq 1}$ de E de forma que

$$Q_m \in \mathcal{N}_k \quad \text{ para todo } m \geq 1.$$

y, además,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \ell(Q_m)^s < \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E) + \varepsilon.$$

Debido a la clase de conjuntos a la que pertenecen los cubos Q_m e I se tiene que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe un único I de forma que $Q_m \subset I$. Esto conduce a definir el conjunto J_I como

$$J_I = \{m \in \mathbb{N} : Q_m \subset I\}.$$

Con todo ello podemos deducir las siguientes desigualdades e igualdades:

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E) + \varepsilon > \sum_{m=1}^{\infty} \ell(Q_m)^s = \sum_{I\in\mathcal{D}_k}\left(\sum_{m\in J_I}\ell(Q_m)^s\right) \geq \sum_{I\in\mathcal{D}_k}\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E\cap I).$$

Como el valor de ε era arbitrario, hacemos que tienda a 0 y conseguimos la desigualdad deseada. $\square$

4.3. Subconjuntos de medida finita. El Lema de Frostman.

De los resultados que vamos a presentar en esta sección, una de las consecuencias fundamentales que podremos obtener de ellos será que existe un gran número de conjuntos con medida s-dimensional de Hausdorff positiva. De hecho, dado un conjunto compacto E con $\mathcal{H}^s(E) > 0$, podremos encontrar un subconjunto de él, F, de forma que

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty.$$

Ahora bien, si el conjunto de partida no se puede expresar como unión numerable de conjuntos de medida finita, este resultado no tiene nada de inmediato.

Antes de dar la prueba del Teorema 4.1.3, vamos a enunciar y demostrar un lema que usaremos posteriormente, en el que se trabaja con conjuntos y subconjuntos de medida finita.

Lema 4.3.1. *Sea la medida definida en la sección anterior $\mathcal{M}^s_\delta$, y un compacto K de forma que $\mathcal{M}^s_\delta(K) < +\infty$. Consideramos un valor $\lambda \in (0, \mathcal{M}^s_\delta(K))$. Entonces, existe un subconjunto compacto $L \subset K$ de forma que $\mathcal{M}^s_\delta(L) = \lambda$.*

Demostración. Comenzamos con la siguiente observación. Dado un $\varepsilon > 0$, existe un $r > 0$ de forma que $\mathcal{M}^s_\delta(\overline{B}(x,r)) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Esta afirmación la usaremos más adelante.

Consideramos ahora dos sucesiones de compactos, de forma que su existencia y construcción se detallarán al final de la demostración. En primer lugar, una sucesión creciente

$$\emptyset \subset F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$$

y, por otro lado, una sucesión decreciente

$$K \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$$

de forma que $F_n \subset E_n$ para todo $n \geq 1$ y verificando $\mathcal{M}^s_\delta(E_n \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Esto último implica que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^s_\delta(E_n \setminus F_n) = 0.$$

Además, a las sucesiones de conjuntos construidas también les exigimos que

$$\mathcal{M}^s_\delta(F_n) \leq \lambda \leq \mathcal{M}^S_\delta(E_n).$$

Si encontramos algún n de forma que $\mathcal{M}^s_\delta(E_n) = \lambda$, o bien $\mathcal{M}^s_\delta(F_n) = \lambda$, tendría ya el resultado, pues contaríamos con un subconjunto del compacto incial K verificando esa propiedad, tal y como se pide en el enunciado.

En caso de no encontrarse nunca un valor de forma que se tenga dicha propiedad exactamente para algún E_n o F_n, podemos decir que para todo valor de n se tiene

$$\mathcal{M}^s_\delta(F_n) < \lambda < \mathcal{M}^S_\delta(E_n).$$

Ahora bien, por una parte tenemos que

$$\mathcal{M}^s_\delta(E_n) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E_n \setminus F_n) + \mathcal{M}^s_\delta(F_n) < \frac{1}{n} + \lambda.$$

Razonando de forma análoga llegamos a

$$\mathcal{M}^s_\delta(F_n) \geq \mathcal{M}^s_\delta(E_n) - \mathcal{M}^s_\delta(E_n \setminus F_n) > \lambda - \frac{1}{n}.$$

Enlazando ambas desigualdades obtenemos que

$$\lambda - \frac{1}{n} < \mathcal{M}^s_\delta(F_n) < \lambda < \mathcal{M}^s_\delta(E_n) < \frac{1}{n} + \lambda. \tag{4.31}$$

Sea ahora el conjunto $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ que se trata de un compacto al ser una intersección de compactos.

Por una parte, se tiene que

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset E_n \quad \text{para todo valor de } n.$$

Por tanto,

$$\mathcal{M}^s_\delta(L) \leq \mathcal{M}^s_\delta(E_n) < \frac{1}{n} + \lambda.$$

Tomando límite cuando n tiende a ∞ se tiene una primera desigualdad

$$\mathcal{M}^s_\delta(L) \leq \lambda.$$

Por otra parte, gracias a la construcción que hicimos de los compactos iniciales tenemos que

$$F_n \subset F_m \subset E_m \quad \text{para todo } m > n.$$

Esto implica que

$$F_n \subset \bigcap_{m \geq n} E_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = L,$$

debiéndose la primera igualdad a que la sucesión de conjuntos $\{E_j\}_{j\geq 1}$ es decreciente, luego la intersección de todos ellos será igual teniendo en cuenta todos o si, de otro modo, contamos a partir de uno en adelante.

Gracias a la monotonía de la medida y a la expresión 4.31 tenemos que

$$\lambda - \frac{1}{n} < \mathcal{M}^s_\delta(F_n) \leq \mathcal{M}^s_\delta(L) \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por último, calculando el límite cuando n tiende ∞ llegamos a que $\lambda \leq \mathcal{M}^s_\delta(L)$, por lo que relacionando las dos desigualdades obtenidas podemos garantizar que

$$\mathcal{M}^s_\delta(L) = \lambda$$

y, por tanto, la existencia de un compacto que verifica la condición que se enunciaba en este resultado.

Falta comprobar la existencia de las sucesiones de compactos que se hizo al principio, así como detallar su construcción.

Partiendo de $E_0 = K$ y $F_0 = \emptyset$, el objetivo es construir por recurrencia E_n y F_n compactos de forma que $F_n \subset E_n$ y que, además, sus medidas verifiquen las desigualdades $\mathcal{M}^s_\delta(F_n) \leq \lambda \leq \mathcal{M}^s_\delta(E_n)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que se tienen construidos E_n y F_n de forma que nos disponemos a construir E_{n+1} y F_{n+1}.

Sea $\varepsilon > 0$ verificando, por ejemplo, $\varepsilon < 1/(n+1)$. Gracias a la observación que hicimos al comienzo de la prueba, sabemos que existe un radio $r > 0$ de forma que $\mathcal{M}^s_\delta(\overline{B}(x,r)) < \varepsilon$. Como E_n es compacto, sabemos que existe una familia finita de recubrimientos por bolas, es decir, existe $x_1, \dots, x_N$ de manera que

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, r).$$

A continuación, consideramos el corte de ciertas bolas de las anteriores con E_n, al que denotamos de la siguiente forma

$$K_l = \left(\bigcup_{j=1}^{l} [\overline{B}(x_j, r) \cap E_n] \right) \cup F_n.$$

Lo que realmente estamos haciendo es añadir a F_n conjuntos de tamaño menor que ε. De forma conveniente, llamamos $K_0 = F_n$ y $K_N = E_n$, de forma que se tiene

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_N$$

y, en particular, $F_n \subset E_n$. Gracias a la monotonía de la medida, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\mathcal{M}^s_\delta(K_0) \leq \mathcal{M}^s_\delta(K_1) \leq \cdots \leq \mathcal{M}^s_\delta(K_N).$$

Si existe un valor de j de forma que

$$\mathcal{M}^s_\delta(K_j) \leq \lambda \leq \mathcal{M}^s_\delta(K_{j+1}),$$

basta considerar los conjuntos K_j y K_{j+1}. Esto es posible gracias a que la diferencia entre dos conjuntos consecutivos es una bola de las anteriores, por lo que se tendrá en cuanto a su medida que

$$\mathcal{M}^s_\delta(K_{j+1} \setminus K_j) < \varepsilon, \qquad \text{para todo } j = 0, \dots, N-1.$$

De esta forma, podemos definir $F_{n+1} = K_j$ y $E_{n+1} = K_{j+1}$, concluyendo de esta forma el procedimiento para construir las sucesiones con las que venimos trabajando durante todo el resultado. $\square$

Uno de los puntos fundamentales en los que se va a basar la prueba del Lema de Frostman o, en todo caso, del Teorema 4.1.3, va a ser la construcción de una sucesión de conjuntos a partir de su medida $\mathcal{M}^s$. Para ello, vamos a dar una serie de hipótesis que serán imprescindibles para el desarrollo de la prueba.

En primer lugar, partiremos de un compacto E con medida s-dimensional positiva, sea finita o infinita. Seguidamente, construiremos la sucesión de la que ya se ha hablado midiendo los conjuntos que aparecen en cada etapa. Cabe señalar que denotaremos como α a $\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E)$ siendo m el primer índice de la sucesión. Como la sucesión será decreciente, se tiene en particular que $E_m = E$. Los conjuntos que forman dicha sucesión dan pie a la definición de una nueva familia que vamos a dar a continuación.

Recordando las expresiones que se dieron de $\mathcal{N}$ (4.7), $\mathcal{N}_k$ (4.8) y $\mathcal{D}_k$ (4.9), nos disponemos ahora a definir otro conjunto que utilizaremos frecuentemente de aquí en adelante. Definimos $\widetilde{\mathcal{D}_k}$ como

$$\widetilde{\mathcal{D}_k} = \{I \in \mathcal{N} : \ell(I) = 2^{-k} \text{ y } I \cap E \neq \emptyset\},$$

cuyo cardinal vamos a denotar por N_k.

Por último, consideramos una sucesión de términos positivos $\{\varepsilon_k\}_{k \geq m}$ de forma que se cumple

$$\varepsilon_k N_k < \frac{\alpha}{2^{k+2}}. \tag{4.32}$$

Con todo esto nos disponemos a recordar y demostrar el resultado que vamos a probar, puesto que ya fue enunciado en la primera sección, así como explicada la deducción del Lema de Frostman a partir de él (Lema 4.1.2 y Teorema 4.1.3.)

Teorema 4.3.2. *Sean $E \subset \mathbb{R}^d$ compacto y $0 < s < d$ con $\mathcal{H}^s(E) > 0$. Existe un subconjunto compacto $F \subset E$, una constante $b > 0$ y un radio $r_0 > 0$ de forma que*

1. $0 < \mathcal{H}^s(F) < +\infty$.
2. $\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r)) \leq br^s$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *y para todo* $r \in (0, r_0)$.

Demostración. Como, por hipótesis, $\mathcal{H}^s(E) > 0$, se tiene gracias a las desigualdades del Teorema 4.2.7 que $\mathcal{M}^s(E) > 0$, por lo que tenemos la garantía de que existe un valor $m \in \mathbb{Z}$ de forma que $\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E) > 0$. A partir de ahora denotaremos por α a $\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E)$, tal y como se dijo en los preliminares del Teorema.

A partir del conjunto que nos da el enunciado, nos disponemos a construir una sucesión decreciente de compactos, que será precisamente $E_{k+1} \cap I$, siendo desde ahora $I \in \widetilde{\mathcal{D}_k}$.

Sea nuestra sucesión $\{E_k\}_{k=m}^{\infty}$ de forma que $E_m = E$. Nuestro objetivo, en cada etapa, es encontrar un compacto $K_I \subset E_k \cap I$ que nos permita definir a partir del mismo el conjunto E_{k+1}. Concretamente, definiremos E_{k+1} como

$$E_{k+1} = \bigsqcup_{I \in \widetilde{\mathcal{D}_k}} K_I, \tag{4.33}$$

de forma que $E_{k+1} \cap I = K_I$ para todo $I \in \widetilde{\mathcal{D}_k}$. Nos disponemos ahora a definir los conjuntos K_I distinguiendo dos casos.

Caso 1: $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) \leq 2^{-sk}$.

Ya es conocido que si $I \in \widetilde{\mathcal{D}_k}$, en particular es de la forma

$$I = \prod_{j=1}^{d} [a_j, a_j + 2^{-k}), \qquad \text{con } a_j \in 2^{-k}\mathbb{Z}. \tag{4.34}$$

Definimos ahora los siguientes intervalos:

$$I_n = \prod_{j=1}^{d} \left[a_j, a_j + 2^{-k} - \frac{1}{n} \right], \tag{4.35}$$

de manera que todo conjunto de la forma $E_k \cap I_n$ se trata ahora de un conjunto compacto. Como la sucesión de los cubos anteriores se trata de una secuencia creciente de conjuntos, su límite es la unión de todos ellos, teniéndose de esta forma que

$$E_k \cap I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_k \cap I_n).$$

Gracias a ello se tiene por el Teorema 4.2.11 que

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{M}^S_{2^{-k-1}}(E_k \cap I_n) = \mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_k \cap I). \tag{4.36}$$

Por tanto, existe un valor n_0 de forma que se tiene

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_k \cap I_{n_0}) \geq \mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_k \cap I) - \varepsilon_k. \tag{4.37}$$

Llegados a este punto, definimos como K_I el conjunto

$$K_I = E_k \cap I_{n_0}. \tag{4.38}$$

Ahora bien, como $2^{-(k+1)} < 2^{-k}$, todo recubrimiento de un compacto cuyos elementos tengan lado menor o igual que $2^{-(k+1)}$, tienen lado menor o igual que 2^{-k}. Dicho de otra forma, el conjunto de los recubrimientos de lado menor o igual que $2^{-(k+1)}$ está contenido en el de aquellos de lado 2^{-k}. Al ser el segundo conjunto mayor, el valor del ínfimo podrá disminuir, por lo que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) \leq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) \leq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap I) + \varepsilon_k,$$

utilizándose en la segunda desigualdad la expresión 4.37. Vamos a probar que la primera desigualdad es en realidad una igualdad, de forma que para este primer caso podremos concluir que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap I) \leq \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) \leq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap I) + \varepsilon_k. \tag{4.39}$$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que se tiene la desigualdad estricta

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) < \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I)$$

y sea $\varepsilon > 0$ de forma que

$$0 < \varepsilon < \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) - \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I).$$

Entonces, sabemos que existe un recubrimiento $\{Q_m\}_{m \geq 1}$ de $E_k \cap I$ de forma que $\ell(Q_m) \leq 2^{-k}$ para todo $m \geq 1$ y, además,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \ell(Q_m)^s < \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) + \varepsilon < \mathcal{M}_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) \leq 2^{-ks}. \tag{4.40}$$

Sabemos que, dada una sucesión con $a_m > 0$ para todo valor de m y $\sum_{m=1}^{\infty} a_m < a$ satisface que $a_m < a$ para todo m. Por tanto, de la expresión que acabábamos de obtener, se deduce que

$$\ell(Q_m) < 2^{-k} \qquad \text{para todo } m \geq 1.$$

Pero como cada Q_m es un cubo diádico, se sigue de lo anterior que $\ell(Q_m) \leq 2^{-(k+1)}$ para todo $m \geq 1$. Con todo esto podemos concluir que para

$$E_k \cap I \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$$

se tiene gracias a las propiedades de la medida y a lo demostrado en la expresión 4.40 que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(Q_m)^s < \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I),$$

lo que resulta una contradicción al haber probado que una cosa es menor estrictamente que ella misma.

<u>**Caso 2:**</u> $\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) > 2^{-sk}$.

Al igual que en el primer caso, volvemos a considerar los cubos I_n de forma que

$$E_k \cap I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_k \cap I_n),$$

teniéndose de nuevo que

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_k \cap I_n) = \mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_k \cap I). \tag{4.41}$$

De ello podemos deducir que existe un n_0 de forma que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I_{n_0}) > 2^{-sk}. \tag{4.42}$$

Gracias al Lema 4.3.1, sabemos que existe un compacto K_I de forma que

$$K_I \subset E_k \cap I_{n_0} \subset E_k \cap I$$

y verificando la siguiente igualdad:

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(K_I) = 2^{-sk}. \tag{4.43}$$

Este último conjunto definiría el conjunto de la etapa $k+1$ de la sucesión de conjuntos $\{E_k\}_{k=m}^{\infty}$. Es decir, tomamos $K_I = E_{k+1} \cap I$.

Cabe señalar que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_{k+1} \cap I) = 2^{-sk} = \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I). \tag{4.44}$$

A continuación vamos a probar la segunda igualdad.

Para tener la desigualdad

$$2^{-sk} \geq \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) \tag{4.45}$$

basta tomar como recubrimiento del conjunto $E_k \cap I$ la familia $\{I\}$ de intervalos diádicos de $\widetilde{\mathcal{D}_k}$.

Para la desigualdad contraria, supongamos que $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) < 2^{-sk}$. De forma similar a como se ha razonado en otras ocasiones, al tratarse de cubos diádicos, sabemos que el ínfimo de la definición de la medida $\mathcal{M}^s_{2^{-k}}$ se alcanza con recubrimientos de cubos cuyos lados son menor o igual que 2^{-k-1}. Por tanto, se tiene que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k-1}}(E_k \cap I) = \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) < 2^{-sk},$$

lo que supone una contradicción con el hecho de que estamos en el caso

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_k \cap I) > 2^{-sk}.$$

Por tanto, se tiene necesariamente las igualdades de la expresión 4.44.

Con todo esto y una vez que hemos estudiado los dos casos posibles, tenemos que para todo intervalo I del conjunto $\mathcal{D}_k$ se tiene

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap I) \in [\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) - \varepsilon_k, \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I)].$$

El Lema 4.2.15 nos permite sumar a lo largo de todos los intervalos I, por lo que si lo hacemos, teniendo en cuenta la definición que se dió para $\widetilde{\mathcal{D}}_k$, así como su cardinal, se tiene que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1}) \in [\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k) - \varepsilon_k N_k, \mathcal{M}^s_{2^k}(E_k)].$$

Como estamos acotando la medida del conjunto de la etapa $k+1$ por la medida del correspondiente a la etapa k de la sucesión, podemos razonar por inducción de forma que llegamos a

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k) \in [\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m) - \sum_{j=m}^{k-1} \varepsilon_j N_j, \mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m)] \subset [\frac{\alpha}{2}, \alpha] \quad \text{para todo } k \geq m. \tag{4.46}$$

Cabe señalar que la contención que aparece en la expresión anterior se debe a que $\alpha = \mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_m)$ y, tal y como se exigía en la condición 4.32,

$$\sum_{j=m}^{k-1} \varepsilon_j N_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j N_j < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2^{k+2}} = \frac{\alpha}{2}.$$

A continuación, fijamos r de forma que $r > k \geq m$. Como la sucesión de conjuntos que hemos definido es decreciente, se tendrá que

$$E_r \subset E_{k+1} \subset E_m = E.$$

Sea $\{I_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\ell(I_n) \leq 2^{-k}$ para todo $n \geq 1$ y, verificando

$$E_r \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Es decir, la familia de conjuntos de la forma de I_n da lugar a un recubrimiento para E_r cuyos elementos tienen lado menor o igual que 2^{-k}. Con todo ello, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)^s &= \sum_{I_n \in \mathcal{D}_k} 2^{-sk} + \sum_{I_n \notin \mathcal{D}_k} \ell(I_n)^s \geq \\ &\geq \sum_{I_n \in \mathcal{D}_k} \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r \cap I_n) + \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r \setminus \bigcup_{I_n \in \mathcal{D}_k} I_n) \geq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r).\end{aligned}$$

La primera igualdad es evidente, puesto que hemos distinguido el caso en el que $I_n \in \mathcal{D}_k$ y en el que no. Por otra parte, para la primera desigualdad hemos utilizado una de las cotas que ya conocíamos para los primeros sumandos:

$$\mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r \cap I_n) \leq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap I_n) \leq 2^{-sk}.$$

Esto es posible ya que, en ese caso, se están considerando cubos diádicos de la familia $\mathcal{D}_k$. Para el otro sumando se ha utilizado la propiedad de subaditividad de la medida. De hecho, tenemos que

$$E_r \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{I_n \in \mathcal{D}_k} I_n \cup \bigcup_{I_n \notin \mathcal{D}_k} I_n.$$

Por tanto,

$$E_r \setminus \bigcup_{I_n \in \mathcal{D}_k} I_n \subset \bigcup_{I_n \notin \mathcal{D}_k} I_n.$$

Utilizando la propiedad que antes se mencionó se tiene la desigualdad deseada. Por último para la última desigualdad de las que se han deducido arriba hemos vuelto a utilizar la subaditividad de la medida, sabiendo que

$$E_r = (\bigcup_{I_n \in \mathcal{D}_k} E_r \cap I_n) \cup (E_r \setminus \bigcup_{I_n \in \mathcal{D}_k} I_n).$$

Tomando ahora ínfimo de entre todos los recubrimientos de E_r cuyos elementos tienen lado menor o igual que 2^{-k} llegamos a

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_r) \geq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r).$$

Como se ha razonado en otras ocasiones, la desigualdad contraria siempre es cierta puesto que todo conjunto de lado menor o igual que $2^{-(k+1)}$ es un conjunto de lado menor o igual que 2^{-k}. Con todo ello, tenemos que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_r) = \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_r).$$

Del resultado al que acabamos de llegar deducimos que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_r) = \mathcal{M}^s_{2^{-r}}(E_r) \quad \text{para todo } k \in [m, r] \cap \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

En particular, tenemos que

$$\mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_r) = \mathcal{M}^s_{2^{-r}}(E_r) \geq \frac{\alpha}{2}. \tag{4.48}$$

Para finalizar la prueba, consideramos el compacto $F = \bigcap_{k=m}^{\infty} E_k$ que lo es al tratarse de una intersección de compactos. Acotando superiormente la medida s-dimensional de Hausdorff de F y utilizando el Teorema 4.2.7, se tiene que para cierta constante β,

$$\mathcal{H}^s(F) \leq \beta^s \mathcal{M}^s(F) = \beta^s \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(F) \leq \beta^s \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k) \leq \beta^s \alpha < +\infty.$$

Para la segunda desigualdad hemos utilizado argumentos de monotonía de la medida mientras que, para la tercera se ha utilizado la cota obtenida en 4.46.

Ahora nos disponemos a buscar una cota inferior para la medida s-dimensional de Hausdorff de F. Se tiene:

$$2^s\mathcal{H}^s(F) \geq 2^s\mathcal{H}^s_{2^{-(m+1)}}(F) \geq \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^s_{2^{-m}}(E_k) \geq M^{-1}\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}^s_{2^{-m}}(E_k) \geq M^{-1}\frac{\alpha}{2}.$$

En esta ocasión hemos usado una de las propiedades de la medida de Hausdorff para la primera desigualdad, mientras que para la segunda se ha hecho uso del Lema 4.2.8. De nuevo, el Teorema 4.2.7 se ha utilizado en la tercera desigualdad y, por último, hacemos referencia a la expresión 4.46 para llegar a la cota que aparece arriba.

Recapitulando, hemos demostrado que $F \subset E$ y, además,

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$$

tal y como se quería probar en la primera parte del teorema.

Nos disponemos ahora a probar el segundo punto enunciado en el teorema.

Nuestro objetivo es probar que

$$\mathcal{M}^s(F \cap I) \leq 2^{-sk} \quad \text{para todo } I \in \mathcal{D}_k. \tag{4.49}$$

Consideramos, para ello, un cubo diádico $J \in \mathcal{D}_l$ con l fijo verificando $k \geq l > m$. De esta forma se tiene que

$$2^{-k} \leq 2^{-l} < 2^{-m},$$

con $2^{-l} = \ell(J)$. De hecho, podemos considerar J como la siguiente unión disjunta:

$$J = \bigsqcup_{I\in\mathcal{D}_k, I\cap J\neq\emptyset} I.$$

Con todo esto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap J) &= \sum_{I\in\mathcal{D}_k, I\subset J} \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap I) \geq \\ &\geq \sum_{I\in\mathcal{D}_k, I\subset J} \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap I) \geq \mathcal{M}^s_{2^{-(k+1)}}(E_{k+1} \cap J),\end{aligned} \tag{4.50}$$

utilizándose en la primera igualdad el Lema 4.2.15.

Considerando el l fijo de antes de forma que $l \geq m$, se tiene lo siguiente para todo $k \geq l$.

$$2^{-sl} \geq \mathcal{M}^s_{2^{-l}}(E_l \cap J) \geq \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(E_k \cap J) \geq \mathcal{M}^s_{2^{-k}}(F \cap J),$$

donde hemos utilizado la desigualdad obtenida en 4.50 para la segunda desigualdad obtenida aquí, así como que F es la intersección de todos los conjuntos E_j para la desigualdad final. Como esta expresión es cierta para todo $k \geq l$, haciendo que k tienda a ∞ llegamos a que

$$\mathcal{M}^s(F \cap J) \leq 2^{-sl}.$$

Como la desigualdad encontrada es cierta para cualquier cubo diádico en $\mathcal{D}_l$, se tendrá la misma relación para cualquier cubo diádico en $\mathcal{D}_k$, de forma que queda probada la expresión 4.49.

Consideremos ahora la bola $B(x,r)$ de forma que

$$2^{-k} \leq r < 2^{-(k-1)}, \quad \text{con } k > m+2.$$

Se tiene que

$$B(x,r) \subset \prod_{j=1}^{d} [x_j - r, x_j + r] \subset \bigcup_{j=1}^{2^d} I_j,$$

siendo I_j cubos diádicos de la familia $\mathcal{D}_{k-2}$. Hay que tomarlos así ya que el diámetro de cualquier intervalo $[x_j - r, x_j + r]$ es $2r$ y, por las condiciones que se le han pedido al radio, se tiene que $2r < 2^{-k+2}$. De esta forma, usando la desigualdad probada anteriormente y llamando $b = 2^d 2^{2s}$, se tiene que

$$\mathcal{M}^s(F \cap B(x,r)) \leq \sum_{j=1}^{2^d} \mathcal{M}^s(F \cap I_j) \leq 2^d (2^{-k+2})^s = 2^d 2^{2s} 2^{-ks} \leq br^s.$$

Haciendo uso de las desigualdades del Teorema 4.2.7,

$$\mathcal{H}^s(F \cap B(x,r)) \leq br^s, \quad \text{si } r \leq r_0 = 2^{-m-2}.$$

como se quería probar. □

En todo momento, los resultados que se han expuesto en este capítulo han sido para una clase particular de conjuntos que se definió al principio del mismo. Por tanto, una pregunta natural que nos podemos hacer es si estos mismos resultados son válidos para una clases de conjuntos más generales. Pues bien, sin entrar en muchos detalles vamos a dar un ejemplo en el que la respuesta es afirmativa. R.O. Davies probó, utilizando una serie de resultados intermedios, que el Lema de Frostman era válido para la clase de conjuntos que vamos a definir a continuación.

Definición 4.3.3. *Sea (M, d) un espacio métrico. Se definen los conjuntos de Souslin aquellos que son de la forma*

$$E = \bigcup_{i_1 i_2 \cdots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{i_1 i_2 \cdots i_k},$$

donde $E_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ son conjuntos cerrados para cada sucesión finita $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ de enteros.

Es interesante ver que, aunque E se construya a partir de una colección numerable de cerrados, la unión se toma sobre infinitas sucesiones de enteros, por lo que cada cerrado puede aparecer en la expresión anterior en diferentes lugares. Además, a diferencia de los conjuntos de Borel, estos conjuntos están definidos explícitamente en términos de uniones e intersecciones de conjuntos cerrados. Nos apoyamos en ellos para enunciar los siguientes resultados.

Teorema 4.3.4. *Sea E cualquier subconjunto de Souslin de $\mathbb{R}^d$ con $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Entonces E contiene a un subconjunto cerrado de medida s-dimensional de Hausdorff infinita.*

La prueba de este resultado es posible encontrarla en [Dav] o [Rog].

Teorema 4.3.5. *Sea E un subconjunto de Souslin de $\mathbb{R}^d$ con $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Entonces se tiene que:*

1. *Para toda constante positiva c existe un subconjunto compacto F de E de forma que $\mathcal{H}^s(F) = c$.*

2. *Existe un subconjunto compacto F de E de forma que $\mathcal{H}^s(F) > 0$ y*

$$\mathcal{H}^s(B(x, r) \cap F) \leq b r^s$$

con $x \in \mathbb{R}^d$, $r \leq 1$ y b una constante positiva.

Bibliografía

[Con] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable.* Springer. Second Edition, 1978.

[Cal] Calderón, A. P. *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1977.

[Dav] Davies, R. O. *Subsets of Finite Measure in Analytic Sets.* Indagationes Mathematicae, 1952.

[Dud] Dudziak, James J., *Vitushkin's Conjecture for Removable Sets.* Springer, 2010.

[Ext] Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura, *Apuntes de Teoría de la Medida.*

[Fal1] Falconer, Kenneth J. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* Wiley. Third Edition, 2014.

[Fal2] Falconer, Kenneth J. *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, 1985.

[Gar] Garnett, J. *Positive length but zero analytic capacity.* Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 696-699.

[Mat] Mattila, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and rectifiability.* Cambridge University Press, 1995.

[New] Newman, M. H. A. *Topology of Plane Sets.* Cambridge University Press, 1951.

[Rog] Rogers, C. A. *Hausdorff Measure.* Cambridge University Press. 1970.

[Rud] Rudin, W. *Análisis Real y Complejo.* Alhambra. Segunda Edición, 1985.

[SS1] Stein, Elias M. y Shakarchi, R., *Complex Analysis.* Priceton Lectures in Analysis, Vol. 2, 2003.

[SS2] Stein, Elias M. y Shakarchi, R., *Real Analysis. Measure Theory, Integration, And Hilbert Spaces.* Priceton Lectures in Analysis, Vol. 3, 2005.

[Tol] TOLSA, XAVIER, *Analytic Capacity, the Cauchy Transform, and Non-homogeneous Calderón–Zygmund Theory.* Birkhäuser, 2014.

[Vit] VITHUSKIN, A. G. *Example of a set of positive length but of zero analytic capacity.* Dokl. Akad. Nauk SSSR 127 (1959), 246-249.